# Práctica #4: Variables Aleatorias Conjuntas

## Ejercicio 17

Sean $X, Y$ variables aleatorias con la siguiente distribución de probabilidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & si \;\; 0 < x < y < 1 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

**Calcule**

1) Verifique que es una fdp válida:

$$\int_0^1 \int_0^y 8xy\, dx\, dy = 8\int_0^1 y\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^y dy = 8\int_0^1 y\left(\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 0\right) dy = 4\int_0^1 y^3 = 4\left(\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = 1$$

2) Encuentre las fdps marginales de $X$ e $Y$

$$f_Y(y) = \int_0^y 8xy\, dx = 8y\int_0^y x\, dx = 8y\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^y = 4y^3$$

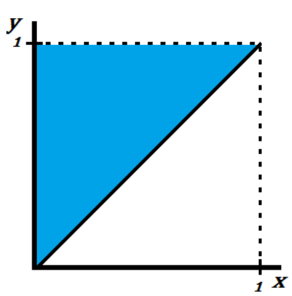
$$f_X(x) = \int_x^1 8xy\, dy = 8x\int_x^1 y\, dy = 8x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_x^1 = 8x\left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = 4\,(x - x^3)$$

3) Determine si son independientes:

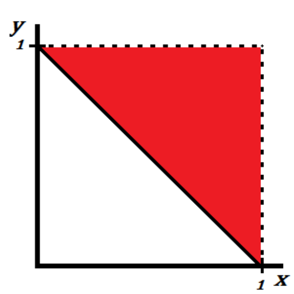
$4(x - x^3)4y^3 = 16(x - x^3)y^3 \neq 8xy \qquad NO\ LO\ SON$

4) $P(X + Y > 1)$

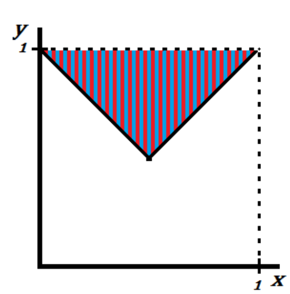
Graficamos el Rango de la Variable Aleatoria , $X + Y > 1$ y su intersección:




$R_{f(x,y)}$



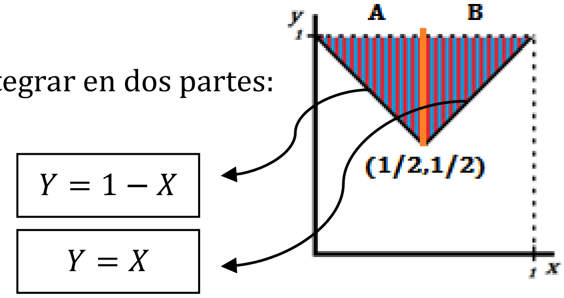

$X + Y > 1$




$R_{f(x,y)} \cap X + Y > 1$

Ahora tenemos que subdividir el área a integrar en dos partes:

Por lo tanto, $P(X+Y>1) = A + B$




**Para A:**

$$A = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{1-x}^{1} 8xy\, dx\, dy = \frac{13}{48} \qquad (realizar\ cálculos\ por\ su\ cuenta)$$

**Para B:**

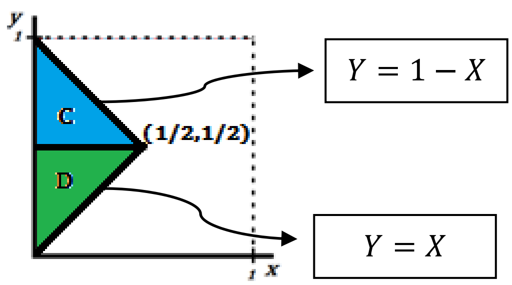
$$B = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{x}^{1} 8xy\, dx\, dy = \frac{9}{16} \qquad (realizar\ cálculos\ por\ su\ cuenta)$$

Por último, $P(X+Y>1) = A + B = \frac{13}{48} + \frac{9}{16} = \frac{5}{6}$

Si quisiéramos verificar que los cálculos son correctos, tendríamos que hallar la probabilidad del complemento y verificar que la suma nos de 1. Esto es:

$$P(X+Y \le 1) = 1 - P(X+Y>1) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \qquad (hallamos\ la\ probabilidad\ )$$

Gráficamente, el área complementaria es:
$P(X+Y \le 1) = C + D$
Ya sabemos que $C + D$ tiene que dar $\frac{1}{6}$
Con esto, verificaríamos completamente
Los cálculos anteriores.




**Para C:**

$$C = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{0}^{1-y} 8xy\, dx\, dy = \frac{5}{48} \qquad (realizar\ cálculos\ por\ su\ cuenta)$$

**Para D:**

$$D = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \int_{0}^{y} 8xy\, dx\, dy = \frac{1}{16} \qquad (realizar\ cálculos\ por\ su\ cuenta)$$

$$P(X+Y \le 1) = C + D = \frac{5}{48} + \frac{1}{16} = \frac{1}{6} \qquad y \qquad \boxed{\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1}$$

## Ejercicio 13

Sean $X, Y$ variables aleatorias con la siguiente distribución de probabilidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6-x-y}{8} & si\ \ 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

1) Obtenga la función de densidad marginal de Y.

$$\int_0^2 \frac{6-x-y}{8} dx = \frac{5-y}{4} \qquad (realizar\ cálculos\ por\ su\ cuenta)$$

Verificamos que es una fdp válida: (Extra)

$$\int_2^4 \frac{5-y}{4} = \frac{1}{4}\int_2^4 5 - y\, dy = \frac{1}{4}\left(5y - \frac{y^2}{2}\right) \Big|_2^4 = \frac{1}{4}\big(20 - 10 + (-8+2)\big) = \frac{4}{4} = 1$$

2) Halle E(Y)

$$E(Y) = \int_2^4 y\frac{5-y}{4} = \frac{1}{4}\int_2^4 5y - y^2\, dy = \frac{1}{4}\left(\frac{5y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right) \Big|_2^4 = \frac{17}{6}$$

3) Determine $P(Y > 1)$

$$P(Y > 1) = \int_2^4 \frac{5-y}{4}\, dy = 1$$

4) Calcule $P(1 < Y < 3, X < 1)$

$$P(1 < Y < 3, X < 1) = \int_2^3 \int_0^1 \frac{6-x-y}{8}\, dx\, dy = \frac{3}{8} \quad (Hacer\ cálculos\ por\ su\ cuenta)$$

## Ejercicio 18

Sean $X, Y$ variables aleatorias con la siguiente distribución de probabilidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x + y - 2xy) & si\ \ 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

1) Verifique que es una fdp conjunta válida:

$$\int_0^1 \int_0^1 2(x + y - 2xy)\, dx\, dy = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{2} + xy - x^2 y \Big|_0^1 \, dy = \int_0^1 dy = y \Big|_0^1 = 1$$

2) Encuentre las fdps marginales de X e Y:

$$f_x(x) = \int_0^1 2(x + y - 2xy) dy = 2 \int_0^1 x + y - 2xy\, dy = 2\left(xy + \frac{y^2}{2} - xy^2\right)\Big|_0^1 = 1$$

$$f_y(y) = \int_0^1 2(x + y - 2xy) dx = 2 \int_0^1 x + y - 2xy\, dx = 2\left(\frac{x^2}{2} + yx - x^2 y\right)\Big|_0^1 = 1$$

3) Determine si son independientes:

Como $f_x(x) f_y(y) = 1 \quad y \quad f(x,y) = 2(x + y - 2xy)\ entonces\ no\ son\ independientes$

**GDPyE/F.C**
**Junio 2011**