Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Computación
Probabilidad y Estadística

Práctica: Cadenas de Markov

Objetivos de la práctica

Objetivo general

Al finalizar la práctica, el estudiante deberá conocer los conceptos fundamentales de las cadenas de Markov, identificar estados de una cadena de Markov, construir matrices y diagramas de transición de las cadenas Markov, calcular vectores de estado, identificar las clases de una cadena de Markov, y determinar el tipo de cada una.

Objetivos específicos

1. Manejar los conceptos de proceso y cadena de Markov y sus propiedades.
2. Identificar situaciones donde se puede aplicar el proceso de Markov.
3. Construir diagramas y matrices de transición de cadenas de Markov.
4. Identificar clases y estados, de una cadena de Markov, y sus tipos.
5. Aplicar la ecuación de Chapman-Kolmogorov para el cálculo de la probabilidad de pasar de un estado a otro en la cadena de Markov, en varios pasos.
6. Transformar procesos que toman en cuenta varios estados anteriores a cadenas de Markov.

Desarrollo de la práctica

Ejercicio 1

¿Cuáles de las siguientes pueden ser matrices de transición de un proceso de Markov?
Dibuje el diagrama de transición asociado a cada una de ellas.

a) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0.55 & 0.33 \\ 0.45 & 0.67 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$

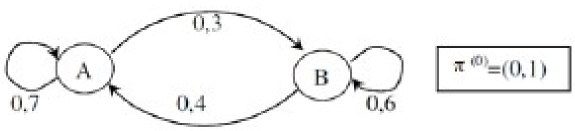
Ejercicio 2

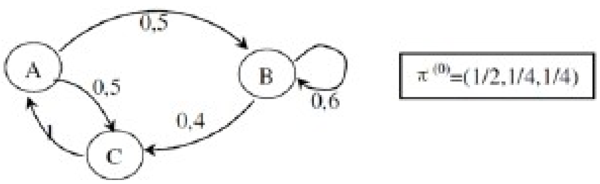
Determine un valor para cada entrada faltante denotada por __, de modo cada matriz sea una matriz de transición de una cadena de Markov. En algunos casos puede haber más de una respuesta correcta

a) $\begin{bmatrix} \_\_\_ & 0.3 & \_\_\_ \\ 0.4 & \_\_\_ & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & \_\_\_ \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & \_\_\_ \\ 0.1 & \_\_\_ & \_\_\_ \\ 0.3 & 0.5 & \_\_\_ \end{bmatrix}$

Ejercicio 3

A partir del siguiente diagrama de transición construya la matriz de transición. Si el vector de estado inicial $^{(0)}$ = (0,1), calcule $^{(1)}$, $^{(2)}$ y $^{(3)}$, con tres cifras decimales.





Ejercicio 4

Clasifique los estados de las siguientes cadenas de Markov, determinando si son si son transitorias o recurrentes y luego cuales son las clases

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5

Supóngase un modelo del mercado de acciones donde el precio de la acción sube o no mañana, dependiendo de si subió o no ayer y hoy. Si la acción subió los dos días, mañana subirá con una probabilidad $_1$, si la acción subió hoy pero ayer bajo, mañana subirá con una probabilidad $_2$, si la acción subió ayer pero hoy bajo, mañana subirá con una probabilidad $_3$, por ultimo si la acción bajo ambos días, la probabilidad de que suba mañana es $_4$.

1. Determine los estados para que el proceso estocástico sea una cadena de Markov.
2. Construya la matriz de transición de la cadena de Markov.

Ejercicio 6

Para cada caso:
- Dibuje el diagrama de transición asociado
- Especifique las clases
- Determine si son transitorias o recurrentes

a)

	A	B	C
A	0.5	0.2	0.3
B	0.1	0.2	0.7
C	1	0	0

b)

	A	B	C
A	0.5	0.2	0.3
B	0.1	0.2	0.3
C	0.5	0.5	0

c)

	A	B	C
A	0	0.4	0.6
B	0.8	0	0.2
C	0.1	0.2	0.7

Ejercicio 7

Una ameba se mueve entre dos áreas: una oscura (A), y una iluminada (B). Estos organismos se encuentran en constante movimiento, pero cuando encuentran luz, ?tienden? a volver en un movimiento próximo. Al pasar por el área A, la probabilidad de volver a pasar por la misma área en su siguiente movimiento es 0,2. Después de pasar por el área B y recibir luz, la probabilidad de pasar a la misma área al movimiento siguiente es 0,8.

1. Determine el diagrama y la matriz de transición para el proceso de Markov.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la ameba vuelva a pasar por el área A después de dos movimientos? (su tercer movimiento es pasar por el área A)?.
3. Indique si la cadena de Markov es ergódica y ¿cuál es el vector de estado estacionario?.

Ejercicio 8

Suponga que las condiciones del clima de mañana (llueve o no llueve) dependa de las condiciones climáticas de los tres días anteriores, defina los estados necesarios para convertir el proceso en una cadena de Markov.

Ejercicio 9

Tome las matrices de transición del ejercicio 1.
Dado un vector de probabilidad para un estado inicial Calcule P^3.

1. X(0) = (2/3, 1/3)

1. X(0) = (1/2, 1/4, 1/4)

(Seleccione y reajuste según amerite)

Ejercicio 10

En el ejercicio 5 supóngase si que ha llovido en los tras días anteriores, mañana lloverá con probabilidad de 0,8, si no ha llovido ninguno de los tres días anteriores mañana lloverá con probabilidad 0,2, en otro caso la probabilidad de que el clima de mañana sea el mismo de hoy es de 0,6.

Ejercicio 11

En las siguientes cadenas de Markov determine las clases de comunicación y calcule el periodo de cada uno de los estados:

a) $\begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

Ejercicio 12

De las siguientes cadenas de Markov indique si tiene vector de estado estacionario y encuéntrelo.

a) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 13

Una partícula se mueve sobre un círculo de puntos marcados 0, 1, 2, 3 y 4, colocados en el sentido de las manecillas del reloj. La partícula comienza en el punto 0, en cada paso tiene una probabilidad q de moverse un punto a la vez en el sentido de las manecillas del reloj (0 sigue al 4) y (1 ? q) de moverse un punto en el sentido opuesto. Sea Xn (n>=0) la localización en el círculo en el instante n { Xn } es una cadena de Markov.

1. Encuentre la matriz de probabilidades de transición.
2. Encuentre las probabilidades de estado estable si existe.

Ejercicio 14

La cervecería más importante del país (etiqueta A) ha contratado un analista de investigación de operaciones para analizar su posición en el mercado. Están preocupados en especial por su mayor competidor (etiqueta B). El analista piensa que el cambio de marca se puede modelar como una cadena de Markov incluyendo 3 estados, A y B representan a los clientes de esas marcas, C representa los clientes de las demás marcas. Los datos se toman cada mes y el analista ha construido la siguiente matriz de transición de los datos históricos. ¿Cuáles son los porcentajes de mercado en el estado estable para las dos cervecerías grandes?

Ejercicio 15

Un fabricante tiene una máquina que cuando se descompone requiere de un día de reparación. La probabilidad de que la máquina se descomponga es p. Defina el estado del sistema como 0 cuando al final del día la máquina se encuentra en operación; 1 cuando la máquina se descompuso durante el día y 2 cuando la máquina habiéndose descompuesto el día anterior pasó el día en reparación. Muestre que este proceso forma una cadena de Markov y encuentre las probabilidades de estado estable.