Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Computación
Probabilidad y Estadística
Quiz #3

Turno Tarde

1) Un periodista importante debe viajar entre Maracaibo, Maracay y Caracas para cubrir las noticias más importantes del deporte que se le asignó en su emisora. Cuando trabaja en Maracaibo, la probabilidad de seguir trabajando ahí al día siguiente es de 0.3 y la de viajar a Maracay es 0.2. Cuando tiene que estar en Maracay, la probabilidad de viajar a Caracas al día siguiente es de 0.1 y la probabilidad de que tenga que trabajar en Maracaibo, 24 horas después, es de 0.5. Por último, si el periodista trabaja un día en Caracas, la probabilidad tanto de viajar a Maracay como quedarse en Caracas al día siguiente es de 0.25. Asumiendo que los viajes del periodista siguen un proceso Markov válido. Se pide:
   a) Calcule la matriz de probabilidades de transición asociada. **(3 ptos)**

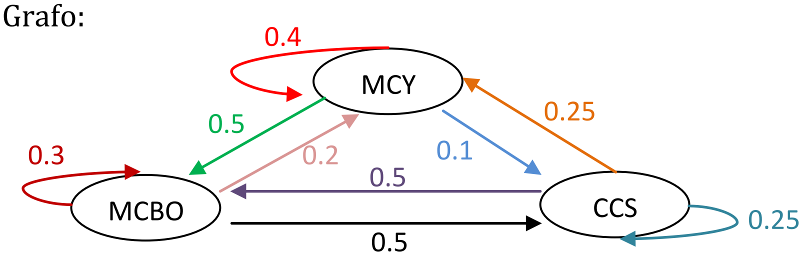
Asumiendo que el orden es Maracaibo, Maracay y Caracas:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & \mathbf{0.5} \\ 0.5 & \mathbf{0.4} & 0.1 \\ \mathbf{0.5} & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

   b) Dibuje el grafo asociado a la cadena de Markov. **(3 ptos)**

Conjunto de Estados ={MCBO,MCY,CCS}

Grafo:



   c) Si el vector de estados inicial $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Halle la probabilidad de que al tercer día de trabajo el periodista se encuentre en Maracay. **(4 ptos)**

En este caso hay dos formas de resolver el ejercicio. Sin embargo, ambas tienen que ver con la forma en la cual se multiplican los vectores de estado con la matriz de probabilidades de transición.

La primera forma es la siguiente:

$$\pi^{(3)} = \pi^{(0)}P^3 = \pi^{(0)}P^2P = \pi^{(0)}P\ P\ P \quad Obtenemos\ P^3\ y\ multiplicamos\ por\ el\ vector$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & \mathbf{0.5} \\ 0.5 & \mathbf{0.4} & 0.1 \\ \mathbf{0.5} & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.265 & 0.295 \\ 0.4 & 0.285 & 0.3150 \\ 0.4 & 0.2625 & 0.3375 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = P^2P = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.265 & 0.295 \\ 0.4 & 0.285 & 0.3150 \\ 0.4 & 0.2625 & 0.3375 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0.412 & 0.2677 & 0.3202 \\ 0.42 & 0.2728 & 0.3073 \\ 0.42 & 0.2694 & 0.3106 \end{pmatrix}$$

Ahora que tenemos P^3multiplicamos por el vector inicial y luego escogemos la columna correspondiente a Maracay.

$$\pi^{(3)} = \pi^{(0)}P^3$$
$$= (0.5 \quad 0.25 \quad 0.25)\begin{pmatrix} 0.412 & 0.2677 & 0.3202 \\ 0.42 & 0.2728 & 0.3073 \\ 0.42 & 0.2694 & 0.3106 \end{pmatrix} = (0.416 \quad 0.2694 \quad 0.3146)$$

La columna de Maracay es la segunda. Matemáticamente el resultado sería:

P(Mcbo en el tercer día)= $(0.416 \quad 0.2694 \quad 0.3146)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.2694$

La segunda forma consiste en explotar las propiedades de multiplicación matriz vector para evitar tener que calcular P^3.

$Se\ tiene\ que\ \pi^{(3)} = \pi^{(0)}P^3 = \pi^{(0)}P^2P = \pi^{(0)}P\ P\ P$
$Sin\ embargo, nótese\ que\ \pi^{(0)}P\ P\ P\ se\ puede\ escribir\ como\ \pi^{(1)}P\ P\ y\ \ luego\ \pi^{(2)}P$
$Entonces,\ calculamos\ \ \pi^{(1)} = \pi^{(0)}P \quad \pi^{(2)} = \pi^{(1)}P \quad \pi^3 = \pi^{(2)}P\ \ en\ ese\ orden.$
$Evitamos\ de\ esta\ forma\ el\ cálculo\ de\ P^3.$

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)}P = (0.4 \quad 0.2625 \quad 0.3375)$$
$$\pi^{(2)} = \pi^{(1)}P = (0.42 \quad 0.2694 \quad 0.3106)$$

$\pi^3 = \pi^{(2)}P = (0.416 \quad \mathbf{0.2694} \quad 0.3146)$ Se toma 0.2694

d) Si el periodista está en Maracaibo. ¿Cuál es la probabilidad de que siga en Maracaibo al cabo de 3 días? **(4 ptos)**

En este caso, $\pi^{(0)} = (1 \quad 0 \quad 0)$

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)}P = (0.3 \quad 0.2 \quad 0.5)$$
$$\pi^{(2)} = \pi^{(1)}P = (0.44 \quad 0.265 \quad 0.295)$$
$$\pi^3 = \pi^{(2)}P = (\mathbf{0.412} \quad 0.2678 \quad 0.3302)$$

2) Un equipo de fútbol profesional afirma que un jugador debe correr 3 km en 14 minutos para poder pertenecer al equipo.
Con el objeto de comprobar estadísticamente que el equipo no es injusto, elegimos al azar 18 futbolistas con características fenotípicas distintas y se midió como variable el tiempo transcurrido desde que comienzan hasta que terminan los 3km. El equipo asegura que la variable tiempo transcurrido desde que comienzan hasta que terminan los 3km sigue una distribución normal de media 14 minutos y desviación 7. El tiempo medio de respuesta de la muestra fue de 19 minutos.
   a) Se pide comprobar la afirmación del laboratorio a un nivel de significación de 0.05. **(5 ptos)**
   b) En base a los resultados de a) ¿Es justo el criterio del equipo de fútbol? Justifique su respuesta. **(2 ptos)**

Datos: $\mu_{muestral} = 19 \quad \sigma = 7 \quad n = 18$

$$H_0 = \mu{=}14$$
$$H_1{=}\text{"}\mu{>}14\text{"}$$

El test de hipótesis busca verificar si, dada la hipótesis nula para la media, la probabilidad del estadístico cae en la zona de rechazo. Esto no es más que comprobar que dada la suposición inicial la probabilidad de que dé ese estadístico sea baja o no.

Tenemos, según la hipótesis nula, la siguiente V.A: $Z = \frac{X-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{X-14}{7/\sqrt{18}}$

$$P\left(\frac{X-14}{\frac{7}{\sqrt{18}}}<\gamma_{0.95}\right)=0.95 \quad \rightarrow \quad \gamma_{0.95}=1.65$$

$$1.65=\frac{X-14}{\frac{7}{\sqrt{18}}} \rightarrow X=\frac{1.65*7}{\sqrt{18}}+14\approx 16.72$$

Como $19 > 16.72$ *entonces* $\mu_{muestral}$ *está en la zona crítica por lo que existe suficiente evidencia para rechazar* H_0

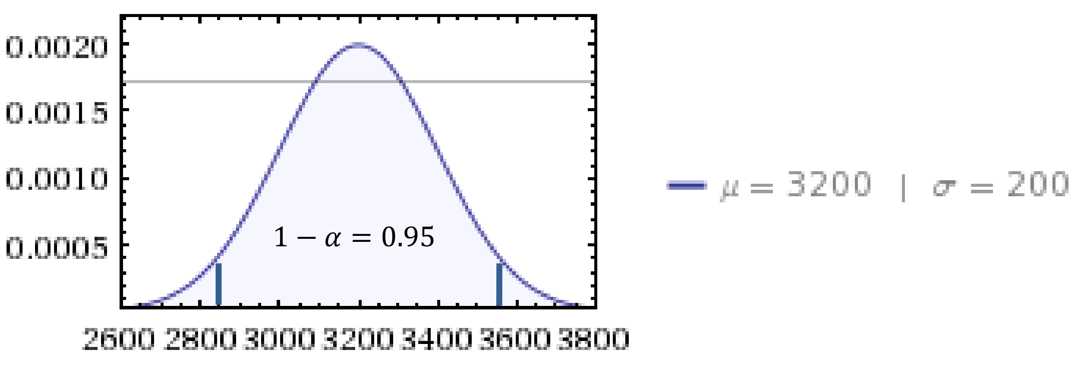
b) Es injusto el criterio de selección del equipo ya que la hipótesis dada era incorrecta. Por lo tanto, se eliminan jugadores injustamente.

3) El peso medio de una muestra de 100 containers en la Güaira fue de 3200 km. Se conoce que la desviación estándar del peso de los container es de 200 km.
   a) Halle el intervalo de confianza para la media de pesos de container con un nivel de significancia de 0.05. **(5 ptos)**

$N = 100$ $X_{muestral} = 3200$ $\sigma = 200$

En este caso tenemos media desconocida y varianza conocida. Como $n = 100$ entonces usamos la variable aleatoria normal.

Como el nivel de significancia es 0.05 entonces el Área contenida en el intervalo debe ser de 0.95.



La probabilidad de que el verdadero valor del parámetro se encuentre en el intervalo construido se denomina nivel de confianza, y tiene probabilidad $1-\alpha$. La probabilidad de equivocarnos se llama nivel de significancia y se simboliza α. Que en este caso es 0.05.

En definitiva, encontramos el cuantil $1-\alpha+\frac{\alpha}{2}=1-\frac{\alpha}{2}=0.975$. El cuantil 0.975 (denotado como $\gamma_{0.975}$) es 1.96. De este modo:

$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$
Por lo tanto,

$$-1.96<\frac{X-\mu}{\sigma}<1.96\ \overrightarrow{despejamos\ \mu}\ \ \boldsymbol{X-1.96*\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu< X+1.96*\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Esto quiere decir que el intervalo es:

$$\boxed{\boldsymbol{X-1.96*\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu< X+1.96*\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

$En\ el\ caso\ específico\ del\ ejercicio$:

$$3200-1.96*\frac{200}{\sqrt{100}}<u<3200+1.96*\frac{200}{\sqrt{100}}\rightarrow\quad\boxed{(3160.8,3239.2)}$$

Realizado por: Fernando Crema