I. INTRODUCCION

1.1 Conceptos básicos

Experimento: Una situación que da lugar a un resultado identificable.

En muchos estudios científicos nos enfrentamos con experimentos que son repetitivos por naturaleza o que pueden ser concebidos como repetitivos.
En estos casos puede existir el interés de cuantificar el chance que puede tener un resultado en particular.

Espacio muestral y eventos.

Consideremos experimentos cuyos resultados no pueden ser predichos con certidumbre, aun cuando todos los resultados posibles sean conocido. El conjunto de estos resultados posibles se le conoce con el nombre de **Espacio Muestral Ω** ó **S**.

ej.1) Experimento: Determinación del sexo de un recién nacido.
Luego **S** = {masculino, femenino}.

ej.2) Experimento: Lanzar 2 monedas.
Luego **S** = {{c,c},{c,s},{s,s}}.

ej.3) Experimento: Lazar 2 dados.
Luego **S** = { (i,j) / i,j = 1,2,..,6 }.

ej.4) Experimento: Medir la vida útil de un chip.
Luego **S** = { x años / $0 < x < \propto$ }.

Evento E es cualquier subconjunto de posibles resultados de un experimento (**Ω** o **S** también se le conoce como evento seguro).

En ej.1: E = {masculino}.
En ej.2: E = { {c,s},{c,c} }
En ej.3: E = { (1,2), (3,2) }
En ej.4: E = { x / $0 < x < 5$ años }

Significado básico e intuitivo de probabilidades.

De manera general podemos definir la probabilidad como el chance relativo de ocurrencia de E en un experimento dado. Esto significa *a grosso modo* que la probabilidad es la fracción de veces que el evento E ocurrirá si el experimento es repetido un gran número de veces bajo las mismas condiciones.

Este significado es dado más fácilmente cuando el Espacio Muestral contiene un número finito de posibles resultados y cuando cada resultado tiene el mismo chance de ocurrir.

Supongamos que estamos interesados en saber que chance tendrá un evento E de ocurrir durante un experimento. La definición clásica: la ***probabilidad*** de ocurrencia de un evento E es el cociente del número de resultados en E entre el número total de resultados. Esta definición será precisada a continuación.

1.2 Definiciones y Lemas básicos.

Definición 1.
Un **modelo probabílistico finito** es un par (**Ω**, ***p***) donde **Ω** es no vacío y finito y

p : **Ω** ----> $\mathbf{R}^1$ (***p*** conocida como *función de densidad*),

tal que:

$$i)\, p(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$ii) \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 \qquad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_k\}$$

La función ***P*** **:** **℘(Ω) -------> [0,1]**, definida a través de:

$$P(E) = \begin{cases} \sum_{\omega \in E} p(\omega) & con \;\; E \in \wp(\Omega), E \neq \emptyset \\ 0 & si \;\; E = \emptyset \end{cases}$$

se llama función de distribución probabílistica o acumulada sobre ω.

donde: **℘(Ω)** compuesto de partes
$\cup\, E_i = \mathbf{\Omega}$
$E_i \in \wp(\Omega)$

Nota: El vacío se conoce como evento imposible.

Definición 2.
Un modelo probabílistico (**Ω,** ***p***) se llama **Modelo de Laplace** sí:

$$\forall\, \omega \in \Omega$$
$$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Observación: Para **E⊆Ω** en el modelo de Laplace tenemos:

$$P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

Ejemplo:
Al lanzar 3 dados simultáneamente se tiene interés en la probabilidad de obtener como suma de los números mostrados un 11 o 12.

Una reflexión superficial nos lleva al siguiente resultado.

La suma 11 es alcanzada con:	La suma 12 es alcanzada con:
6+4+1	6+5+1
6+3+2	6+4+2
5+5+1	6+3+3
5+4+2	5+5+2
5+3+3	5+4+3

4+4+3 4+4+4

El experimento antes descrito se puede representar formalmente por el siguiente Modelo Probabilistico(**Ω, *p***):

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \ / \ 1 \le \omega_i \le 6, \ \omega_i \in \mathrm{N}, \ 1 \le i \le 3\}$$

$$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6^3} \quad \forall \omega \in \Omega$$

Nota: Esto es valido siempre y cuando los dados no estén cargados por razones simétricas.

Los sucesos o eventos:

$$E_1 = \{ \omega \in \Omega \ / \sum_{i=1}^{3} \omega_i = 11 \}$$

$$E_2 = \{ \omega \in \Omega \ / \sum_{i=1}^{3} \omega_i = 12 \}$$

tienen los siguientes cardinales:

$$|E_1| = 27 \qquad |E_2| = 25$$

Luego,

$$P(E_1) = \sum_{\omega \in E_1} p(\omega) = \frac{|E_1|}{6^3} = \frac{27}{216}$$

$$P(E_2) = \sum_{\omega \in E_2} p(\omega) = \frac{|E_2|}{6^3} = \frac{25}{216}$$

Lema 1.
Sea (**Ω, *p***) un Modelo Probabilistico finito y *P* la función acumulada de *p*. Entonces se cumple:

(a) $P(E) \ge 0 \quad \forall E \subseteq \Omega$

(b) $P(\Omega) = 1 \quad y \quad P(\emptyset) = 0$

(c) $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$, *si los* $E_i \subseteq \Omega$, son mutuamente excluyentes

(d) $P(E^C) = 1 - P(E), \quad \forall E \subseteq \Omega$

(e) $P(E) \le 1 \qquad \forall E \subseteq \Omega$

(f) $E \subseteq F \subseteq \Omega \Rightarrow P(F \cap E^C) = P(F) - P(E)$

(g) $E \subseteq F \subseteq \Omega \Rightarrow P(E) \le P(F)$

(h) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \ \forall E, F \subseteq \Omega$.

Lo siguiente es una generalización de (h):

$$P(E_1 \bigcup E_2 \bigcup .... E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) +$$
$$.. + (-1)^{r+1} \sum_{i_1<..<i_r} P(E_{i_1} .. E_{i_r}) + .. + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 .. E_n)$$

<u>Demostración.</u>

(a) Por definición $p(\omega) \geq 0$, *luego* $P(E) = \sum_{\omega \in E} p(\omega) \geq 0$

(b) Por definición $P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1 \ \wedge \ P(\emptyset) = 0$

$(c) P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{w \in \bigcup_{i=1}^{n} E_i} p(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\omega \in E_i} p(\omega) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$

$(d) 1 =_{(b)} P(\Omega) = P(E \cup E^C) =_{(c)} P(E) + P(E^C)$

$(e) P(E) =_{(d)} 1 - P(E^C) \leq_{(a)} 1$

$(f)\ P(F) = P(F \cap \Omega) = P(F \cap (E \cup E^C) == P((F \cap E) \cup (F \cap E^C)) =_{(c)} P(F \cap E) +$
$P(F \cap E^C) =_{E \subset F} P(E) + P(F \cap E^C)$

$(g)\ P(F) =_{(f)} P(E) + P(F \cap E^c) \geq_{(a)} 0$

(h) 1. Dado que $E \cup F = E \cup (E^c \cap F) \Rightarrow P(E \cup F) = P(E \cup (E^c \cap F)) =_{(c)} P(E) + P(E^c \cap F)$

2. Dado que $F = (E \cap F) \cup (E^c \cap F) \Rightarrow P(E^c \cap F) = P(F) - P(E \cap F)$
sustituyendo 2 en 1 tenemos : $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

<u>1.3 Repaso de Combinatoria.</u>

Permutaciones.
¿De cuántas maneras se pueden ordenar *n* objetos?
$n*(n-1)*(n-2)*...*1 = n!$ (selección *sin repetición o sin reposición*)

¿De cuántas maneras se pueden elegir *r* objetos desde n objetos para ser inspeccionados?
n^r (selección *con repetición o reposición*)

Si no se toma en cuenta el orden en que son escogidos tendremos:

$$C_r^{n+r-1} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n+r-1-r)!} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

(Este número también es conocido como combinaciones con repetición)

Variaciones ó Permutaciones sin repetición.
¿De cuántas maneras se pueden escoger r objetos desde n objetos, sin que se admita la repetición de uno de ellos en la escogencia?

$$V_r^n = \binom{n}{r} r! = (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Combinaciones.
¿De cuántas maneras se puede escoger un subconjunto de r elementos desde un conjuntos de n elementos?

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{V_r^n}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Nota: Las combinaciones se diferencian de las variaciones en el hecho de que el orden en que es conformada la elección no es relevante.

<u>Resumen</u>:

	Permutaciones	Combinaciones
Con repetición:	n^r	C_r^{n+r-1}
Sin repetición:	$(n)_r$	C_r^n

e1) Del lanzamiento de un dado no cargado podemos concluir que:

$$p(\{1\}) = \ldots.. = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

luego, la probabilidad de que salga un número par es:

$$P(\{2,4,6\}) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\})$$

e2) Un comité de 5 personas será conformado desde una lista de 6 hombres y 9 mujeres. Si todos en la lista tienen igual probabilidad de conformar el comité, ¿cuál es la probabilidad de que el comité quede conformado finalmente por 3 hombres y 2 mujeres?

<u>Solución:</u>

$$|\Omega| = \binom{15}{5}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001}$$

e3) Una mano de Poker es de 5 cartas. Si estas cartas tienen valores consecutivos y no todas son de la misma pinta se dice que conforman una *cadena*. ¿Cuál es la probabilidad de que al repartirse las cartas el primer jugador reciba una cadena(recibe las cartas una detrás de la otra)?

Solución:

$$|\Omega| = \binom{52}{5} \qquad \text{posibles manos.}$$

Sea A: 5 números consecutivos no de la misma pinta.

Antes de calcular |A|, veamos como calcular el conjunto de resultados del tipo: As, 2, 3, 4 y 5.

De cada uno de estos números hay cuatro cartas con diferentes pintas asociadas. Por ello existen 4^5 posibilidades. Se sabe, entonces que solo hay 4 posibilidades de que salga la serie con la misma pinta, por lo tanto al pedir que no todos sean iguales se tendrá (4^5-4) posibilidades.

Las opciones posibles son:

As	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9
6	7	8	9	10
7	8	9	10	S
8	9	10	S	C
9	10	S	C	R
10	S	C	R	As

Por lo tanto tendremos 10*(4^5-4) posibles cadenas.

$$\Rightarrow \text{La probabilidad deseada es } \frac{10(4^5 - 4)}{\binom{52}{5}}$$