II. PROBABILIDADES CONDICIONALES.

2.1 Definiciones

Supongamos que lanzamos dos dados

$$\Rightarrow \ p(\omega) = \frac{1}{36} \ \text{con} \ \omega = (\omega_1, \omega_2) \ \ \omega_1, \omega_2 \in \{1,2,...,6\}$$

Si observamos que el primer dado muestra el número 4, ¿Cual es la probabilidad de que la suma sea igual a 6?.

Las siguientes combinaciones:

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)

tienen la misma probabilidad condicional igual a 1/6. Mientras de las otras 30 tienen una probabilidad igual a cero.

Veamos esto con nuestra notación.

Sean:

$$E = \{ (\omega_1,\omega_2) \ / \ \omega_1 + \omega_2 = 6 \} = \{ (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) \}$$

$$F = \{ (\omega_1,\omega_2) \ / \ \omega_1 = 4 \} = \{ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \}$$

Luego P(E dado que se sabe que ocurrió F) = 1/6

<u>Definición 2.1</u>

Probabilidad condicional:

$$P(E \ / \ F) \ = \ \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad con \quad P(F) > 0$$

P(E/F) := Probabilidad de que E se presente dado que F ya se presentó.

En consecuencia la **Regla General de multiplicación** es:

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} E_i) = P(E_1) * P(E_2 / E_1) * P(E_3 / E_1 E_2) * P(E_4 / E_1 E_2 E_3) * ...... * P(E_n / E_1 E_2 .. E_{n-1})$$

Ejercicios.

e1) Cartas numeradas del 1 al 10 son mezcladas. Si sabemos que el número de la última carta es al menos un 5, ¿cuál es la probabilidad (condicional) de que ella sea el 10?.

Con S = {1,2,...10}, sean

E = { El número de la carta es el 10 } = {10}
F = { El número es al menos un 5 } = {5,6,7,8,9,10}

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{\frac{|E|}{|\Omega|}}{\frac{|F|}{|\Omega|}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{1}{6}$$

e2) En un retén se encuentran 2 niños ordenados por la edad, ¿cual es la probabilidad de que ambos son varones si se conoce que uno de ellos lo es?.

<u>Solución.</u>

S = { (v,v),(v,h),(h,v),(h,h) }

E = { (v,v) }
F = { (v,v),(v,h),(h,v) }

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{\frac{|E|}{|\Omega|}}{\frac{|F|}{|\Omega|}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

e3) Un estudiante que no sabe suficiente inglés tiene la oportunidad de tomar un curso especializado en Computación en Inglés el próximo semestre. Este estudiante podrá financiarse el curso de Inglés con probabilidad 1/2 durante este semestre. Si toma el curso de Inglés antes de tomar el curso de Computación su probabilidad de aprovechar realmente el curso de Computación es 1/3.
¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante aprovecha el curso en Computación y toma el curso de Inglés?

<u>Solución:</u>

F : El estudiante toma el curso de Inglés antes del de Computación
E : El estudiante aprovecha el curso en Computación

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} => \quad P(E \cap F) = P(F)*P(E/F) = 1/2 * 1/3 = 1/6$$

e4) En una cadena de bits se encuentran 7 bits con valor '1' y 5 bits con valor '0'. Si se escogen al azar dos bits, ¿cuál es la probabilidad de que ambos tengan valor '1'?

<u>Solución:</u>

F : El primer bit escogido esta en '1'
E : El segundo bit escogido esta en '1'

Si el primer bit escogido esta en '1', entonces quedarían en la cadena 6 bits en '1' y 5 en '0'.

$$\Rightarrow P(E/F) = 6/11 \ \wedge P(F) = 7/12$$

$$\text{Luego, } P(E \cap F) = P(F)\, P(E/F) = 6/11 * 7/12 = 42/132$$

Tarea del lector: Hacer el ejercicio anterior pero escogiendo al azar 3 bits en vez de 2.

Eventos Independientes.

Definición 2.2

E y F son independientes sii P(E∩F) = P(F) P(E)

(Observación: Esta definición implica que P(E/F) = P(E) y que P(F/E) = P(F))

e1) En el lanzamiento de dos dados, sean:

Ω = { (i, j) / i,j = 1,...,6 }   **|Ω|** = 36

E : La suma de los números mostrados por los dados es 6   E = { (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) }
F : El primer dado muestra un 4.   F = { (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) }

P(E ∩F) = P({(4,2)}) = 1/36 y P(E)*P(F) = 5/36 * 1/6 = 5/216

Entonces E y F no son independientes[1].

Por el contrario si E fuese: La suma es 7, entonces E y F si serían independientes. Veamos,

P(E∩F) = P({(4,3)}) = 1/36
P(E) P(F) = 1/6 * 1/6 = 1/36

Generalización de la definición de independencia.

$$E_1, E_2, .., E_n \quad \textit{son eventos independientes} \quad \_\_$$

$$\forall \{ \ E_{1'}, E_{2'}, .., E_{r'} \ \} \ \textit{con } r' \leq n$$

$$\textit{se cumple} \quad P(E_{1'}, E_{2'}, .., E_{r'}) = \ P(E_{1'}) P(E_{2'}) .... P(E_{r'})$$

2.2 Probabilidades Totales.

Sean E y F dos eventos cualquiera en Ω.

Tenemos que E = EF ∪ EF^C, y como EF y EF^C son mutuamente excluyentes (disjuntos) entonces,

$$P(E) = P(EF) + P(EF^C)$$

$$= P(E/F)\,P(F) + P(E/F^C)\,P(F^C) = P(E/F)\,P(F) + P(E/F^C)\,[1 - P(F)]$$

Nota: P(E) es la suma ponderada dado que ocurrió F o F^C.

[1] Notéis que también puede salir el (1,5)).

Ejercicios.

e1) En un examen de selección múltiple con **m** posibles respuestas un estudiante conoce la respuesta con una probabilidad p y la probabilidad de que adivine es 1-p. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante conteste correctamente?.
Solución.

Sean C y R eventos definidos de la manera siguiente:

C : El estudiante responde correctamente
R : El estudiante conoce la respuesta.

Luego se quiere saber P(C).

$$P(C) = P(C/R)P(R) + P(C/R^C)P(R^C)$$

Dado que P(C/R)=1 y $P(C/R^C)$ es la probabilidad de que su adivinanza sea correcta tendremos,

$$P(C) = p + (\tfrac{1}{m})(1-p)$$

con m=4 y p=1/2, P(C)=5/8.

Generalización de Probabilidades Totales o Regla de eliminación.

Si $F_1, F_2, .., F_n$ son una partición de Ω y E en Ω, entonces

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(F_i)P(E/F_i)$$

e2) En una fábrica se elabora un cierto producto con 3 maquinas diferentes (MI, MII, MIII). En estas maquinas el 3%, 5% y 2% de los productos resultan defectuosos respectivamente. Del total de la producción de esa fábrica el 20% es elaborado por la maquina I, el 30% por la maquina II y el 50% por la maquina III.
¿Cuál es la probabilidad de que al tomar al azar un producto de esa fábrica este resulte defectuoso?

Solución.
Sean:
F_i: El producto fue elaborado en Mi. (i = I, II, III).
E : El producto resulta defectuoso.

donde:

P(FI) = .2 ; P(FII) = .3 ; P(FIII) = .5

P(E/FI) = .03 ; P(E/FII) = .05 ; P(E/FIII)=.02

Luego,

P(E) = P(E/FI)P(FI) + P(E/FII)P(FII) + P(E/FIII)P(FIII)

P(E) = .031 (es decir, el 3,1% de los productos es defectuoso).

2.3 Fórmula de Bayes

Sean E y F en Ω, luego se cumple:

$$P(F / E) = \frac{P(E / F)P(F)}{P(E / F)P(F) + P(E / F^C)P(F^C)}$$

e1) En dos cadenas de bits se conoce que en la 1a. cadena hay 2 bits en '1' y 7 en '0' y en la 2da. cadena 5 están en '1', 6 en '0' respectivamente. Con el lanzamiento de una moneda se decide escoger un bit en la primera o segunda cadena, dependiendo si sale cara(C) o sello(S).
¿Cuál es la probabilidad de que el resultado fue cara dado que se escogió un bit en '1'?.

Solución.
Sean definidos los eventos C y B de la manera siguiente:
B : El bit seleccionado está en 1
C : La moneda sale cara.

Luego lo que se quiere saber es,

$$P(C/B) = \frac{P(CB)}{P(B)} = \frac{P(B/C)P(C)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B/C)P(C)}{P(B/C)P(C) + P(B/C^c)P(C^c)}$$

$$= \frac{\frac{2}{9}\frac{1}{2}}{\frac{2}{9}\frac{1}{2}+\frac{5}{11}\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}+\frac{5}{22}} = \frac{22}{67} = .3284$$

e2) En un examen de selección múltiple con **m** posibles respuestas un estudiante conoce la respuesta con una probabilidad p y la probabilidad de que adivine es 1-p. ¿Cual es la probabilidad de que el estudiante conocía la respuesta que contesto correctamente?.

Solución.
Sean C y R eventos definidos de la manera siguiente:
C : El estudiante responde correctamente
R : El estudiante conoce la respuesta.

Luego se quiere saber:

$$P(R/C) = \frac{P(RC)}{P(C)} = \frac{P(C/R)P(R)}{P(C/R)P(R) + P(C/R^C)P(R^C)}$$

Dado que P(C/R)=1 y P(C/R^C) es la probabilidad de que su adivinanza sea correcta tendremos,

$$P(R/C) = \frac{p}{p + (\frac{1}{m})(1-p)}$$

con m=5 y p=1/2, P(R/C)=5/6

e3) Los exámenes del laboratorio de una clínica privada resultan correctos en el 95% de los casos de infección cuando la infección esta presente.
Estos exámenes arrojan un resultado "positivo" que es falso en el 1% de las personas sanas que se someten al examen, es decir, que si la persona esta sana entonces el examen le puede decir con una probabilidad .01 que ella esta enferma.
Además se sospecha que el 5% de la población tiene esa infección.
¿Cuál es la probabilidad de que una persona tenga la infección dado que recibió un resultado positivo ?

Solución.
Si D: La persona tiene la infección y
E: El resultado del examen es positivo,

la interrogante será P(D/E) ?.

$$P(D/E) = \frac{P(DE)}{P(E)} = \frac{P(E/D)\,P(D)}{P(E/D)\,P(D) + P(E/D^C)\,P(D^C)} =$$

$$= \frac{(.95)(.05)}{(.95)(.05) + (.01)(.95)} = \frac{5}{6} \approx .833$$

Esto significa que solo el 83,3% de las personas cuyos resultados fueron positivos tienen la infección.

Generalización de la fórmula de Bayes.

Sean $F_1, F_2, .., F_n$ una partición de Ω (son mutuamente excluyentes).

Entonces,

$$E = \cup EF_i \ \Rightarrow \ P(E) = \sum P(EF_i) = \sum P(E/F_i)P(F_i).$$

Por ello, con $P(F_j/E) = P(EF_j)/P(E)$ tendremos finalmente la fórmula de Bayes:

$$P(F_j / E) = \frac{P(E / F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E / F_i)P(F_i)}$$

e1) Supongamos que colocamos un archivo en uno de tres directorios que se han creado.
Sea p_i la probabilidad de encontrar el archivo en el directorio i luego de una breve inspección en caso de que el archivo se encuentre en el directorio i (p_i<1).
Suponiendo que se revisa superficialmente el 1er. directorio y no se encuentra el archivo que se busca. ¿Cuál es la probabilidad de que el archivo se encuentre efectivamente en ese directorio?.

Solución.
Sea F_i (i=1,2,3) el evento de que el archivo se encuentra en el directorio i y sea E el evento de que una búsqueda superficial en el directorio 1 no se convierte en la aparición de el archivo. En base a esto se desea conocer la $P(F_1/E)$.

Aplicando el teorema de Bayes tendremos:

$$P(F_1 / E) = \frac{P(E/F_1)\,P(F_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(E/F_i)\,P(F_i)} = \frac{(1-p_1)\frac{1}{3}}{(1-p_1)\frac{1}{3} + \frac{1}{3}*1 + \frac{1}{3}*1} = \frac{1-p_1}{3-p_1}$$