IV. DISTRIBUCIONES DE VARIABLES ALEATORIA DISCRETA.

4.0 DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Es la VA más simple (Modelo Probabílistico finito de Laplace). El conjunto imagen es finito $\{x1, x2,..,xn\}$ para $n \geq 1$ y su función de masa (densidad) es definida como: $p(xi) = 1/n$ para todo i $(1 \leq i \leq n)$. Esta VA es conocida como la Variable Uniforme ya que las probabilidades son uniformes sobre esta imagen. Ejemplos de ella son los resultados del lanzamiento de un dado, extracción de una baraja desde un paquete, etc.

4.1 PROCESOS DE BERNOULLI (1713).

Una repetición de pruebas o experimentos aleatorios independientes se llama Proceso de Bernoulli si solo hay dos posibles resultados para cada prueba y la probabilidad para cada resultado posible permanece constante durante la prueba.

A estas dos probabilidades se les suele denotar por p y q, indicando con p la probabilidad de éxito E y q la probabilidad de falla F.

$p, q > 0$ y $p + q = 1$.

El espacio muestral para cada prueba de Bernoulli (VA Bernoulli) es constituido solo por dos puntos X = {1, 0}ó {Exito, Fracaso} ó {v, f}, etc. Su Esperanza matemática E[X] será igual a p y su Varianza será $p(1-p)$.(Verificar!)

e1) De sucesivos lanzamientos de una moneda simétrica se tiene que $p=q=1/2$.

e2) De sucesivos lanzamientos de un dado no cargado, donde:

E: sale 1 y
F: Sale 2,3,4,5 y 6; tendremos $p=1/6$ y $q=5/6$.
Con E: sale par y con F: sale impar se tendrá $p=q=1/2$.

Las pruebas de Bernoulli constituyen un modelo teórico y solo la experiencia puede mostrarnos si este es adecuado o no para describir determinada observación.

En este sentido, el hecho de sucesivos lanzamientos de una moneda "simétrica" conforma una prueba de Bernoulli se basa en experiencias obtenidas vía experimentación. Sin embargo no se puede dejar de mencionar que cada uno de nosotros después de que se han realizado 20 lanzamientos y ha caído siempre sello se ve más probable de que en el próximo lanzamiento saldrá cara. Esto último no tiene que ver con imperfecciones de la moneda, más bien esta relacionado con la "memoria", es decir se está negando la independencia estocástica de pruebas sucesivas.

El espacio muestral de n pruebas de Bernoulli tiene 2^n puntos, cada uno con una secuencia de n letras E, F representando los posibles resultados.

Como cada prueba es independiente de la otra tendremos:

P(EEEFF...FEFE) = P(E)P(E)P(E)P(F)P(F)...P(F)P(E)P(F)P(E) = $pppqq...qpqp$

4.2 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL [X ~ B(n,p)].

Si X es una VA del número de éxitos que hay en 'n' ensayos de Bernoulli independientes, entonces esta VA se dice que sigue una distribución Binomial.

La función de densidad probabilistica de dicha distribución es como sigue:

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}, \quad para \ i = 0,..,n$$

para demostrar que esta función es una función probabílistica solo queda mostrar que $\Sigma_{i=0}\ p(i) = 1$, lo cual resulta bastante fácil al aplicar el desarrollo de Binomio de Newton:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = (p + q)n = (p + (1 - p))n = 1$$

ya que:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

<u>Esperanza matemática</u>.

Usando la función generadora de momentos tenemos:

$$\phi(t) = E[e^{tx}] = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k} = (pe^t + (1-p))^n$$

Por lo tanto,

$$\phi'(t) = n(pe^t + (1-p))^{n-1} * pe^t$$

Entonces $E[X] = \phi'(0) = np$

<u>Varianza</u>.

Para calcular la Varianza, derivemos primero $E[X^2]$ de la siguiente manera:

$$\phi''(t) = n(n-1)(pe^t + 1 - p)^{n-1} * (pe^t)^2 + n(pe^t + 1 - p)^{n-1} * pe^t$$

Por lo tanto,

$$\phi''(0) = E[X^2] = n(n-1)p^2 + np$$

Entonces:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 = npq$$

Ejercicios.

e1) Una moneda es lanzada 20 veces. Calcule el número más probable de salidas de cara y cual es la probabilidad de que salga ese número.

<u>Solución;</u>

El número más probable de caras es evidentemente $n\,p = 10$. Y la probabilidad de que salga 10 veces es:

$$p(10) = \binom{20}{10} (1/2)^{10} * (1/2)^{10} = .176$$

e2) Supongamos que la probabilidad de recuperar un carro robado en Caracas es de 0.04.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 carros robados sean recuperados a lo sumo 3 de ellos?
b) ¿ Cuál es la probabilidad de que al menos 7 de los 10 carros sean recuperados?

Solución:

a) $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$ = .66 + .27 + .05 + .0058 = .9995

b) $P(X=7) + P(X=8) + P(X=9)$ = .00055

e3) Supongamos que un motor de avión de una determinada marca falla en vuelo con una probabilidad *(1-p)* independientemente de un motor a otro. Igualmente se puede suponer que un avión realiza un vuelo exitoso si el 50% de sus motores se mantiene trabajando. ¿Para que valores de *p* es preferible un cuatrimotor a un bimotor?.

Solución:
Sea X: # de motores que se mantienen en operación durante el vuelo.
Luego, la probabilidad de que un cuatrimotor realice un vuelo exitoso es:

$$\begin{gathered} P(X=2)+P(=3)+P(X=4)= \\ \binom{4}{2} p^2(1-p)^2+\binom{4}{3} p^3(1-p)+\binom{4}{4} p^4(1-p)^0= \\ =6p^2(1-p)^2+4p^3(1-p)+p^4 \end{gathered}$$

Y la probabilidad de que un bimotor realice un vuelo exitoso será:

$$\begin{gathered} P(X=1)+P(X=2)=\binom{2}{1} p(1-p)+\binom{2}{2} p^2 \\ =2p(1-p)+p^2 \end{gathered}$$

Por lo tanto el cuatrimotor será más seguro que el bimotor si:

$$\begin{gathered} 6p^2(1-p)^2+4p^3(1-p)+p^4 \geq 2p(1-p)+p^2 \\ 6p(1-p)^2+4p^2(1-p)+p^3 \geq 2-p \end{gathered}$$

es decir:

$$\begin{gathered} 3p^3-8p^2+7p-2 \geq 0 \\ (p-1)^2(3p-2) \geq 0 \end{gathered}$$

Por lo tanto el cuatrimotor será más seguro que el bimotor sí: $p \geq 2/3$.

4.3 DISTRIBUCIÓN GEOMÉTRICA [X ~ G(*p*)](caso particular de la Binomial).

Consideremos un proceso de Bernoulli con fracaso (F) y éxito (E), donde la probabilidad de éxito es $p=P(E)$.
Sea una secuencia de experimentos que culmina cuando el primer éxito se presente, es decir

F F F F F F F F E, con n como el número de F antes de ocurrir E, entonces

$$P(X=n) = P(F)*P(F)*...P(F)*P(E) = (1-p)^n p$$

donde X representa el número de ensayos sin éxito.

Para mostrar que esta función es una función probabílistica nos resta mostrar que la suma sobre todo su espacio es 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

$$\left[\text{Serie Geometrica} \quad \sum_{i=0}^{\infty} ar^i = \frac{a}{1-r} \right]$$

En relación con la función de distribución acumulada se puede notar lo siguiente:

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} (1-p)^i p = \sum_{t=0}^{\infty} (1-p)^{t+k} p$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} (1-p)^t (1-p)^k p = (1-p)^k p \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k$$

$$\text{Luego} \;\; P(X < k) = 1 - P(X \geq k) = 1 - (1-p)^k$$

e1) En el lanzamiento de un dado, la probabilidad de que el 4 sea observado por 1a. vez en el 6to. lanzamiento es

$$P(X=5) = (5/6)^5.(1/6) = .067$$

Y la probabilidad de que al menos 6 lanzamientos sean requeridos para observar un 4 es:

$$P(X \geq 5) = \sum_{i=5} (5/6)^i * (1/6) = (5/6)^5 = .402$$

<u>Esperanza matemática de X Geométrica (Redefiniendo Y como el # de intentos antes del 1er éxito)</u>

$$E[Y] = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} \qquad (con\ q = 1-p)$$

$$= p\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(q^n)}{dq} = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\frac{(1-q)-q}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

Luego, $E[X] = E[Y] - 1 = (1-p)/p$

Tarea: Calcular la Varianza!

<u>Ejemplos</u>

e1) La probabilidad de que una componente de un sistema computacional falle en un ciclo de tiempo (dt) es p.

a) ¿ Cuál es el tiempo promedio esperado para que la componente falle?

Solución: Asumiendo que las fallas ocurren independientemente entre si, el # de ciclos (1 dt) para la primera falla debería seguir una distribución geométrica. Luego el tiempo promedio de falla de una componente será $1/p$.

b) Suponga que se requieren 'n' componentes para construir una parte. Asumiendo que la parte falla si falla una de sus componentes, ¿ cual es la probabilidad de que cualquiera de sus componentes falle?

Solución: Para n componentes, la probabilidad de falla de la parte es la acumulada a 'n'de la Geométrica, es decir,

$$P(X \leq n) = 1 - (1-p)^n$$

[para p pequeño, la suma a n de p es igual np, entonces el tiempo esperado para que ocurra la 1ª. Falla será $1/(np)$]

e2) (Mirrored disk) Suponga que un disco es duplicado (con la misma data) para que una eventual falla sea tolerada. Suponga que no ocurre otra falla durante el tiempo de reparación del 1er. disco que falle. Si el tiempo promedio de falla (MDF) de estos discos es de 'm' ciclos y el tiempo de reparación es de 1 ciclo, mostrar que el tiempo esperado para una falla total (fallen los dos discos) es de m^2 ciclos.

Solución: Asumiendo que las fallas ocurren independientemente entre ellas con probabilidad $p = 1/m$ en cualquier ciclo, entonces la probabilidad de que ambos discos fallen en un ciclo dado es p^2. En consecuencia, dado que el comportamiento de esta variable sigue una distribución Geométrica, el tiempo promedio transcurrido antes de que se presente una falla total será m^2.

4.4 BINOMIAL NEGATIVA [X ~ BN(r,p)].

Supongamos que se realizan experimentos independientes con una probabilidad de éxito en cada experimento 'p' hasta que 'r' éxitos sean alcanzados. Entonces si X denota el número de ensayos requeridos tendremos que:

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \quad para \;\; n = r, r+1, \ldots$$

Obsérvese que el r-ésimo éxito debe coincidir con el n-ésimo ensayo, por lo tanto r-1 éxitos deben haberse presentado en los primeros n-1 ensayos y además el n-ésimo ensayo debe ser un éxito.
Como, la probabilidad del 1er. evento es:

$$\binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-r}$$

y la probabilidad del 2do. evento es p, en consecuencia debido a la independencia entre estos eventos tendremos que la probabilidad de que n ensayos sean requeridos para alcanzar r éxitos será:

$$P(X = n) \; = \; (\binom{n-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-r}) * p$$

<u>**Nota**</u>
La VA Geométrica es una Binomial negativa con parámetros 1, p. (Verificar!).

e1) ¿Si la probabilidad de éxito de ensayos independientes es p, cual es la probabilidad de que r- éxitos ocurran antes de m fracasos?.

<u>Solución;</u>
Como el r-ésimo éxito debe ocurrir no antes del r+m-1 -ensayo, entonces la probabilidad deseada es:

$$\sum_{n=r}^{r+m-1} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

4.5 DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMETRICA

La distribución Binomial es importante en muestreos con reemplazo.

Supongamos que queremos conocer el # de elementos defectuosos presentes en una muestra de '*n*' elementos, extraídos de una urna que contiene '*N*' elementos de los cuales '*M*' están defectuosos. Si la extracción es *con reemplazo* entonces la probabilidad de escoger *x* elementos defectuosos tendrá un comportamiento Binomial, es decir:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\left(M/N\right)^{x}\left(1-M/N\right)^{n-x} \quad x=0,1,..,n$$

Sin embargo, lo correcto en un caso como el de inspección, sería hacer la selección sin reemplazo, en cuyo caso en la 1ª selección la probabilidad de que salga defectuoso es *M/N*, pero la segunda vez seria *(M-1)/(N-1)* ó *M/(N-1)* si antes salió defectuoso o no (# de casos favorables / # de casos posibles).

- Los casos posibles son $\binom{N}{n}$.

- En cuanto a los casos favorables se debe considerar lo siguiente:

Los x éxitos (defectuosos) pueden ser elegidos desde los M posibles de $\binom{M}{x}$ formas diferentes y cada forma de estas es combinada con las formas diferentes de escoger '*n-x*' elementos no defectuosos que son: $\binom{N-M}{n-x}$.

En consecuencia x éxitos y n-x fracasos pueden elegir de $\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}$ formas o maneras diferentes.

Luego, la probabilidad de escoger x elementos defectuosos en una muestra de n elementos *sin reemplazo* será:

$$P(X=x)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x=0,1,..,n$$

lo cual da lugar a la distribución conocida como **Hypergeométrica.**

Esperanza matemática de la Hypergeométrica:

Supongamos que n elementos de la muestra son seleccionados desde los N de la población manera secuencial. Si definimos la VA: $Xi=\begin{cases}1 \text{ exito en la } i \text{ - esima selección}\\ 0 \text{ fracaso en la } i \text{ - esima selecc.}\end{cases}$

Entonces, $X=\sum_{i=1}^{n} Xi$, nos señala el # de elementos defectuosos de la muestra de n elementos.

Luego, $E[X]=E\left[\sum_{i=1}^{n} Xi\right]=\sum_{i=1}^{n} E[Xi]$ y como $E[Xi] = 1.\ p(Xi=1) + 0\ .\ p(Xi=0) = p(Xi=1) = M/N$, se tiene que:

$$\boldsymbol{E[\ X\ ] = n\ .\ M/N}$$

El calculo de la Varianza es problemático porque las Xi no son independientes y en consecuencia hay que considerar indicadores no considerados hasta ahora (Covarianzas). El resultado es:

$$VAR\ [X] = \frac{nM\ (N - M)(N - n)}{N^2 (N - 1)}$$

COMPARACIÓN DE LA HYPERGEOMETRICA Y LA BINOMIAL

Para que la probabilidad de éxito ($p=M/N$) se mantenga mas o menos constante y en ese caso se pueda aplicar la Binomial, la N debe ser muy grande (tender a infinito). En algunos casos prácticos, usualmente se acepta esta aproximación cuando $n \leq N/10$. Por otro lado en otras situaciones practicas no importa demasiado muestrar con o sin reemplazo cuando N, M y N-M son mayores que n.

4.6 DISTRIBUCIÓN DE POISSON [X ~ P(λ)]

Una VA X que toma valores 0,1,2,... se dice que sigue una distribución de Poisson con parámetro λ si para algún λ,

$$P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \quad i = 0,1,..$$

Obsérvese que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} * e^{\lambda} = 1$$

$$Mac\ Laurin : e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Esperanza Matemática y Varianza.

Con la ayuda de la función generadora de momentos tenemos:

$$\phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Por ello,

$$\phi'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}$$

luego, $$\phi''(t) = (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t - 1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}$$

En consecuencia:

$$\phi'(0) = E[X] = \lambda$$

y con $E[X^2] = \phi''(0) = \lambda^2 + \lambda$, entonces la Varianza de X será:

$$VAR[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = (\lambda^2+\lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

Nota: Es conveniente señalar que algunos autores utilizan el parámetro $1/\lambda$ al usar la Poisson y en consecuencia la Esperanza es también $1/\lambda$.

Relación con la Binomial: Esta distribución se puede derivar de la Binomial cuando el número de experimentos es muy grande y en cada uno de ellos la probabilidad de un éxito es sumamente pequeña.
Recordando la Binomial y haciendo coincidir la Esperanza de la Binomial, np, y la de la Poisson, λ, tendremos $p=\lambda/n$ y en consecuencia:

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i * (1 - p)^{i-1} = \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i}$$

$$= \frac{n(n-1)..(n-i+1)(n-i)!}{n^i (n-i)!} * \frac{\lambda^i}{i!} * \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i}$$

Para $n \to \infty$ y $p \to 0$ resulta:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \quad \frac{n(n-1)..(n-i+1)}{n^i} \approx 1$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^i \approx 1$$

Por lo tanto,

$$P(X = i) \approx e^{-\lambda} * \frac{\lambda^i}{i!}$$

Nota:
En la practica se considera una buena aproximación, cuando $p < 0.1$ y $np < 5$.

PROCESOS DE POISSON

En esta sección presentaremos una situación muy importante que es descrita por la distribución de Poisson.

Para calcular la probabilidad de que se presenten ***x*** éxitos (Por ejemplo; llegadas a un sistema) en un intervalo de tiempo de longitud T, dividimos el intervalo en n subintervalos iguales de longitud dt, de tal forma que $T = n.dt$ y suponemos que:

1. La probabilidad de éxito en cada subintervalo es independiente de lo ocurrido en los otros subintervalos
2. La probabilidad de mas de un éxito en cada subintervalo en cada subintervalo es despreciable.
3. La probabilidad de un éxito durante un subintervalo dt es dada por $\alpha.dt$. Es decir, proporcional al tamaño del intervalo, donde α representa el número promedio de ocurrencias por unidad de tiempo.

Esto significa que se satisfacen las condiciones para presentar una Binomial que represente el fenómeno a través de suma de n Bernuolli en cada subintervalo y por ello la probabilidad de tener x éxitos en un intervalo de longitud T sigue una B$(x; np)$ donde $n=T/dt$ y $p=\alpha.dt$.
Ahora, si tomamos un $n \to +\infty$ y $dt \to 0$, podemos aproximar esta Binomial por la distribución Poisson con $\lambda = np = T/dt * \alpha\, dt = \alpha\, T$, es decir:

$$f(x) = p_x(T) = \frac{(\alpha T)^x e^{\alpha T}}{x!}$$

es la probabilidad de *x* llegadas en un intervalo de tiempo *T* en un *Proceso de Poisson*.