V. DISTRIBUCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

5.1 DISTRIBUCION UNIFORME [X ~ U(0,1)].

Una VA X se dice uniformemente distribuida sobre el intervalo (0,1) si su función de densidad probabilistica es dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Nótese que:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 dx = x \Big/_0^1 = 1 - 0 = 1$$

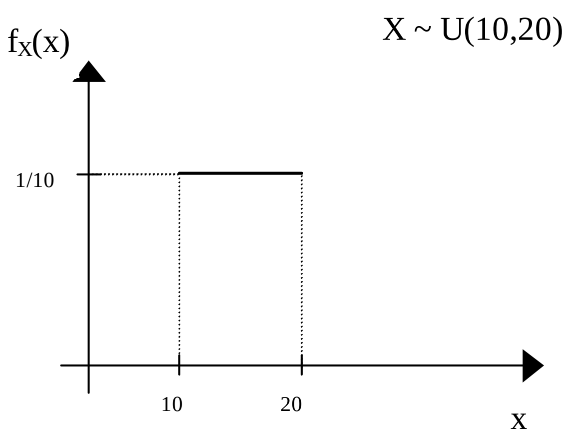
Ahora veremos que, para todo a,b tal que 0 < a < b < 1 se cumple:

$$\text{Prob} \ \{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = x \Big/_a^b = b - a$$

En general, decimos que X es una VA Uniforme en el intervalo (a,b)
[X ~ U(a,b)] si su función de densidad probabilistica viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a < x < b \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo.



en consecuencia, su función de distribución acumulada viene dada por:

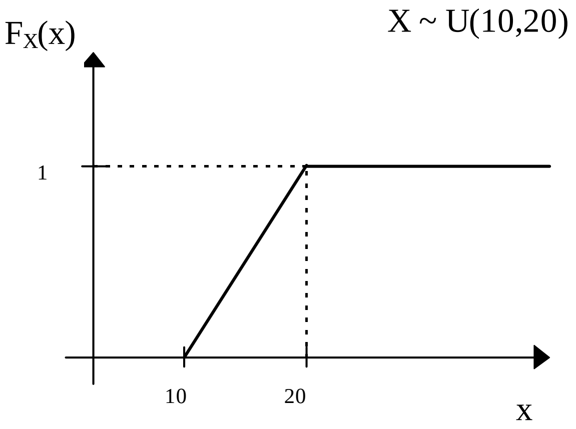
$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt =$$

$$para \quad a < x < b: \quad \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{1}{b-a} t /_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}$$

$$para \quad x > b: \quad F(b) + \int_{b}^{x} 0\,dt = \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1 + 0 = 1$$

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

Ejemplo:



<u>Esperanza Matemática sobre (a,b).</u>

$$E[X] = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

(Justamente el punto medio del intervalo)

La varianza vendría dada por:

$$\mathrm{var}[x] = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$\Rightarrow \quad E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}\Big/_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} =$$

$$\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{var}[x] = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} =$$

$$\frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

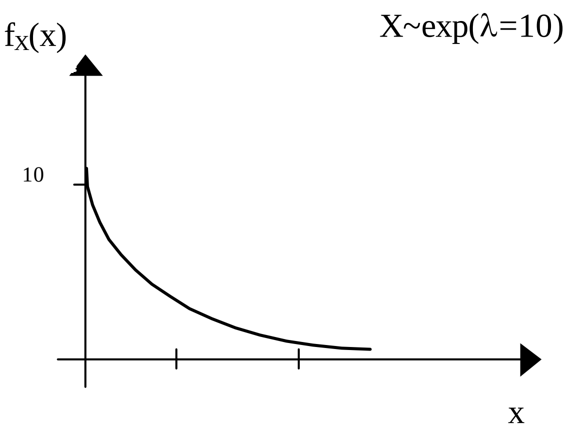
Tarea: Calcular la Varianza en casa vía función generadora de momento.

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

5.2 DISTRIBUCION EXPONENCIAL [X ~ E(λ)].

Una VA X se dice que sigue una distribución exponencial si su f.d.p. es dada para algún $\lambda>0$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$



Cuya función de distribución acumulada es:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x f(t)dt =$$

$$\Rightarrow \qquad F(x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = 1 - e^{-\lambda x}\,, \quad \lambda \geq 0$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}\, dt = \lambda \frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} /_0^x = -(e^{-\lambda t} /_0^x) =$$

$$-[e^{-\lambda x} - e^{-\lambda 0}] = -[e^{-\lambda x} - 1] = -e^{-\lambda x} + 1 == 1 - e^{-\lambda x}$$

<u>Esperanza matemática.</u>

12
$$E[X] = \int_0^\infty x\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx$$

aplicando sustitución por partes:

$$\int udv = uv \;/ - \int vdu$$

$$u = \lambda x \qquad\qquad dv = e^{-\lambda x}\, dx$$

13
$$du = \lambda\, dx \qquad\qquad v = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}$$

$$= \int_0^\infty \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, dx = \lambda\, x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} /_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \lambda\, dx =$$

14
$$= -x\, e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = 0 - \left.\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

<u>Varianza:</u> Calculemos la varianza vía la transformación de la función generadora de momento siguiente:

$$Con \quad R(t) = \ln\, \phi(t) \;\Rightarrow\; R'(t) = \frac{1}{\phi(t)} \phi'(t)$$

$$\Rightarrow \quad R'(t = 0) = \frac{1}{\phi(t = 0)} \phi'(t = 0) = \frac{1}{1} E[X] \Rightarrow \quad R'(0) = E[X]$$

$$y \quad R''(t) = \frac{\phi''(t)\phi(t) - (\phi'(t))^2}{(\phi(t))^2} \Rightarrow \quad R''(0) = \frac{\phi''(0)\phi(0) - (\phi'(0))^2}{(\phi(0))^2}$$

$$= \frac{\phi''(0) \cdot 1 - (\phi'(0))^2}{(1)^2} = E[X^2] - (E[X])^2 \Rightarrow \quad R''(0) = VAR(X)$$

por conveniencia, hacemos: $\lambda = \dfrac{1}{\theta}$

Veamos, si:

$$\phi(t) = \int_0^\infty e^{tx}\left(\frac{1}{\theta}\right)e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{\theta}\right)e^{-(1-\theta t)\frac{x}{\theta}}\,dx = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty e^{-\frac{(1-\theta t)\,x}{\theta}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\theta}\cdot\left.\frac{e^{-(1-\theta t)\frac{x}{\theta}}}{\dfrac{-(1-\theta t)}{\theta}}\right|_0^\infty = -\left.\frac{e^{-(1-\theta t)\frac{x}{\theta}}}{1-\theta t}\right|_0^\infty = -\frac{(0-1)}{1-\theta t} = \frac{1}{1-\theta t} \quad \text{con} \quad \theta = \frac{1}{\lambda} \ y\ t < \frac{1}{\theta}$$

sustituimos $\phi(t)$ en $R(t)$,
entonces,

$$R(t) = \ln(\Phi(t)) = \ln\left(\frac{1}{1-\theta t}\right) = \ln(1) - \ln(1-\theta t) = 0 - \ln(1-\theta t)$$

$$\Rightarrow R(t) = -\ln(1-\theta t) \quad y$$

$$R'(t) = \frac{\theta}{1-\theta t}\ ; \quad R''(t) = \frac{\theta^2}{(1-\theta t)^2}$$

Por lo tanto:

$$R'(0) = E[X] = \theta = \frac{1}{\lambda} \quad y \quad R''(0) = VAR[X] = \theta^2 = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

A continuación presentaremos **la relación existente entre esta distribución y la distribución de Poisson**.

Supongamos que estamos frente a un proceso de Poisson de llegadas a un sistema con parámetro λt, luego podemos concluir que los tiempos entre llegadas están distribuidas exponencialmente con parámetro λ. Sea,

$$P_x(t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

la probabilidad de que se presenten x llegadas (éxitos) al sistema en un intervalo de tiempo *t*. Entonces, si *T* es la V.A. que denota en tiempo transcurrido entre dos llegadas consecutivas podremos concluir que ello equivale a que en un intervalo de tiempo no hay ninguna llegada (x=0), es decir,

$$P_0(t) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!}$$

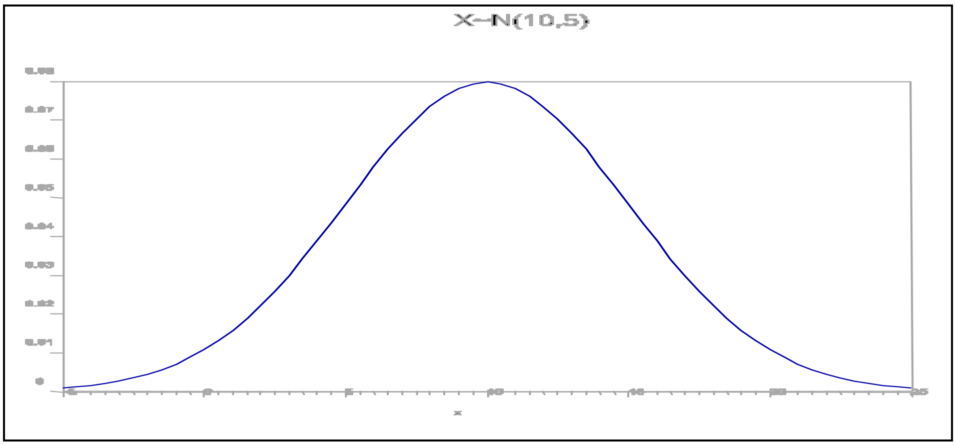
= Probabilidad de que no se presenten llegadas en un intervalo de tiempo *t*
= Probabilidad de que no se presenten dos llegadas consecutivas en un intervalo de tiempo $t = P(T > t) = 1 - P(T \leq t)$
Luego $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, es decir que *T* sigue una distribución exponencial con parámetro λ.

5.3 DISTRIBUCIÓN NORMAL [X ~ N(μ,σ)]

Es la V.A. mas importante entre las continuas por su multiplicidad de aplicaciones, en especial cuando se aplica el Teorema Central del Limite que veremos más adelante.

La f.d.p. de una V.A. que sigue una distribución Normal con parámetros μ,σ es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} ; \quad -\infty < x < \infty$$



Ejemplo. Gráfica de la f.d.p de la *N(10,5)*.

NOTA:
Dada la simetría de la función de densidad de la Normal tenemos que: $F(\mu - x) + F(\mu + x) = 1$

La función de Distribución de la $N(\mu,\sigma)$ es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

A continuación mostraremos que los parámetros μ,σ^2 son exactamente el Valor esperado y la Varianza de la distribución Normal.

Valor Esperado y Varianza de la Normal.

Usando la función generadora de momentos tendremos:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x^2-2(\mu+\sigma^2 t)x+\mu^2]} dx$$

reemplazando en $\phi(t)$ con:

$$x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + \mu^2 = [x - (\mu + \sigma^2 t)]^2 - 2\mu\sigma^2 t - \sigma^4 t^2$$

tendremos:

$$\phi(t) = e^{\frac{2\mu\sigma^2 t+\sigma^4 t^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x-(\mu+\sigma^2 t)]^2} dx$$

Si observamos en esta última ecuación la parte después de la integral, notaremos que esta es una f.d.p. de una distribución normal con parámetros $\mu+\sigma^2 t$, σ.
Por lo tanto al integrar esta función entre $-\infty$ e $+\infty$ tendremos como resultado un 1.
En consecuencia la f.g.m. queda de la manera siguiente:

$$\phi(t) = e^{\frac{2\mu\sigma^2 t+\sigma^4 t^2}{2\sigma^2}} = e^{\mu t+\sigma^2\frac{t^2}{2}}$$

Usando la transformación del logaritmo neperiano de la f.g.m. tendremos:

$$R(t) = ln\,\phi(t) = \mu t + \sigma^2\frac{t^2}{2}$$

$$luego\ R'(t) = \mu + \sigma^2 t,\ \ y\ \ R''(t) = \sigma^2$$

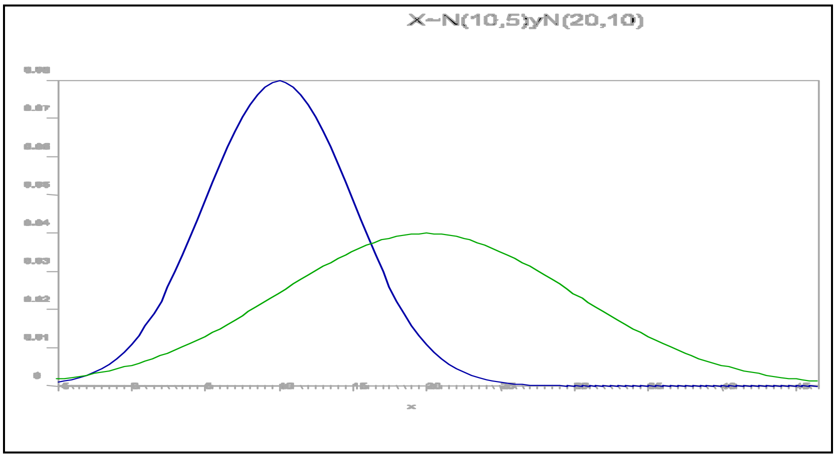
Y en consecuencia:

$$R'(0) = \mu = E[X]$$

$$R''(0) = \sigma^2 = VAR[X]$$

Con lo que queda demostrado lo antes planteado.
Transformación de la V.A. N(μ,σ) a la N(0,1).

Dada la dificultad para obtener los valores de la distribución normal con parámetros μ ,σ; usualmente se transforma la variable con estos parámetros a una N(0,1) y allí se determina la información probabílistica deseada. Por ello, en la mayoría de los libros de Estadística y Probabilidades existen tablas con valores de la función de distribución de la Normal 0,1 o Normal standard o tipificada.



En consecuencia, a continuación se presenta una transformación lineal $Z= \alpha X + \beta$ de la V.A. $X \sim N(\mu,\sigma)$ y que podrá ser usada para pasar a la $N(0,1)$, usando el apropiado valor para α y β.

En primer lugar mostraremos que Z sigue una $N(\alpha\mu+\beta,\alpha\sigma)$. Si suponemos que $\alpha>0$ y que $F_Z(.)$ sea la función de distribución acumulada de la VA Z, entonces,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\alpha X + \beta \leq z) = P(X \leq \frac{z-\beta}{\alpha})$$

$$F_X(\frac{z-\beta}{\alpha}) = \int_{-\infty}^{(z-\beta)/\alpha} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

haciendo el cambio de variable y observando las consecuencias en los limites de integración:

Con $v = \alpha X + \beta$, si $x = \frac{(z-\beta)}{\alpha} \Rightarrow v = z$

$$\Rightarrow F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\alpha\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[v-(\alpha\mu+\beta)]^2}{2\alpha^2\sigma^2}} dv$$

$$y \text{ como } F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_z(v)dv$$

Podremos concluir que la función de densidad de Z es:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\alpha\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-(\alpha\mu+\beta))^2}{2(\alpha\sigma)^2}} \quad con -\infty < Z < \infty$$

O sea que $Z \sim N(\alpha\mu+\beta, \mu\sigma)$.

Una implicación directa de este resultado es que si $X \sim N(\mu,\sigma)$, usando $\alpha = 1/\sigma$ y $\beta = -\mu/\sigma$, entonces $Z = (X - \mu)/\sigma \sim$ N(0,1) o standard.

(Note que $E[Z] = 1/\sigma * \mu - \mu/\sigma = 0 \;\wedge\; VAR[Z] = (1/\sigma)^2 * \sigma^2 = 1$).

Debido a la simetría de la función de densidad de la normal standard tenemos que: $F(-z) = 1 - F(z)$

5.4 DISTRIBUCION GAMMA [X ~ G(α,λ)]

Una V.A. X sigue una distribución Gamma con parámetros α,λ si su función de densidad es:

$$f(x;\alpha,\lambda) = \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} \quad si \;\; x \geq 0$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

donde con α entero y positivo se puede mostrar (integrando por partes) que $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)!$.
Observe que: Γ(n) = 1/n * Γ(n+1) entonces Γ(n+1) = n * Γ(α) y

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^0 e^{-t}\, dt$$ = 0 + 1 = 1; Γ(2)=1*Γ(1)=1; Γ(3)=2*Γ(2)=2;.........

El valor esperado de la gamma es: α/λ

Note que con $\alpha = 1$ se obtiene la función de densidad de la función exponencial. Las V.A. Gamma y exponencial son preferentemente utilizadas en aplicaciones del tiempo de vida útil.

Aplicación (para su interpretación en la practica):

Consideremos que los períodos de stress de un equipo ocurren de manera aleatoria en el tiempo durante su vida útil y además que luego de un numero fijo de períodos de stress ocurre una falla.
Sea N_t una V.A. que denota el numero de períodos de stress en un intervalo de tiempo t y sea T_α el tiempo de ocurrencia del α-ésimo período de stress, entonces la probabilidad de falla en o antes de un tiempo t es:

$$P(N_t \geq \alpha) = P(T_\alpha \leq t) = \int_0^{t} f(z;\alpha,\lambda)dz$$

donde λ es la tasa promedio de llegadas de períodos de stress.

Para averiguar quien es $f(t;\alpha,\lambda)$ retomemos la ultima discusión en la sección 5.2 donde $P_\alpha(t)$ era la probabilidad de α llegadas en un intervalo de tiempo t. Ahora consideremos, desde otro punto de vista, la V.A. T_α que nos indica el tiempo en el cual α eventos (llegadas) se presentan. Con el razonamiento de la sección 5.2 tendremos:

$$f(t) = \lim_{dt\to 0} [F(t+dt)-F(t)]/dt = \lim_{dt\to 0} [P(t < T_\alpha < t+dt)]/dt$$

$$= \lim [P_{\alpha-1}(t).P_1(dt)]/dt =$$

$$= \lim_{dt\_>0} \frac{\frac{(\lambda t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\lambda t} * [\lambda dt + 0(dt)]}{dt}$$

En consecuencia la función de densidad de T_α es:

$$\lambda \frac{(\lambda t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

Note que esta ultima expresión corresponde a la función de densidad de la distribución gamma con parámetros α,λ y que contiene la función gamma para α entero y positivo.

Debe notarse que: la vida útil esperada (α/λ), es proporcional a α, una medida de durabilidad del equipo, e inversamente proporcional a λ, una medida de la severidad del ambiente.