VI. ALGUNOS TEOREMAS LIMITES IMPORTANTES

6.1 Teorema de De Moivre-Laplace

(Parte I)

Si 'x' y 'n' ---> +∞, de manera tal que

$$\frac{x - np}{\sqrt{npq}} \text{---\_} > z < +\infty$$

Entonces se verifica que:

$$\sqrt{npq}\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \text{--\_}> \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

(La demostración de este teorema esta fuera del alcance de este curso, sin embargo interesados pueden ver esta demostración en: Feller W., "An Introduction to Probability Theory and its applications", Vol.1, Wiley, N.Y., 1950.)

Con el resultado anterior se permite calcular la binomial por la fórmula:

$$b(x,n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad donde\ z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

con lo cual se estaría aproximando la distribución Binomial con la distribución Normal, recordando que al tipificar una Normal se tiene que $z = (x - \mu) / s$.

(Parte II)
Si X es una V.A. que representa el # de éxitos en n pruebas de un proceso de Bernoulli con probabilidad 'p', entonces se debe verificar que:

$$P(a < X \leq b) = \phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

donde '_' es la f.d.p. de la distribución N(0,1).

6.2 Ley de los Grandes Números.

Considerando la Parte II del Teorema de De Moivre-Laplace, para $b = np + e$, y $a = np - e$ resulta:

$$P(np - \varepsilon < X < np + \varepsilon) \approx 2\phi(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}) - 1$$

$$reemplazando\ \varepsilon\ por\ \varepsilon n\ \_>\ P(|\frac{x}{n} - p| < \varepsilon) \approx 2\phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) - 1$$

Para $n\text{-->}+\infty$ el 2do. miembro de la ecuación tiende a 1 con lo cual queda demostrado el Teorema de Bernoulli que dice:
"En una sucesión de pruebas de Bernoulli con probabilidad 'p', dado un número cualquiera $\varepsilon > 0$, la probabilidad de que el número de éxitos dividido por 'n' difiera de 'p' en menos de ε tiende a la unidad para $n\text{-->}+\infty$".

$$P\{lim_{n\_>\infty}(X_1 + X_2 + .. + X_n) / n = p\} = 1$$

6.3 TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE.

Si las V.A. $X_1,...,X_n$ son independientes y todas siguen la misma distribución con esperanza matemática μ y varianza σ^2 diferente de cero, entonces la nueva variable aleatoria

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

es asíntotica a la normal standard.

A continuación mostraremos 2 aplicaciones del Teorema que permiten aproximar la distribución Binomial y la Poisson a través de la distribución Normal.

Aplicación 1.

Sean V.A. X_i (i=1,..,n) del tipo Bernoulli, donde $P(X_i=1) = p$ y $P(X_i=0) = q$, entonces:
$\mu = 1*p + 0*q = p$ y $s^2 = (1-p^2)*p + p^2*q = pq$

Como la suma de Bernoulli es una Binomial, digamos Z, entonces podremos aplicar el Teorema Central del Limite sobre la Binomial, con lo cual:
$Z = (X_1+..+X_n - np) / (\_npq)$ es Normal(0,1). (Compare con DeMovrie-Laplace).

Aplicación 2.

Sea X_i (i=1,,n) V.A. Poisson con $E[X_i]= \lambda$ =$VAR[X_i]$, $\forall$i, luego
$X = X_1+ X_2+ ..+X_n$ otra Poisson con parámetro $n\lambda = \Lambda$.
entonces,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X - \Delta}{\sqrt{\Delta}} < z\right) = f(z)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r<\Delta+z\sqrt{\Delta}} \frac{\Delta^r}{r!} e^{-\Delta} = f(z)$$

Luego, se puede concluir que para Λ grande una distribución de Poisson se puede aproximar por la Normal Standard, razón por la cual en las tablas de la Poisson no existen $\Lambda > 10$.

<u>Ejemplo de Aplicación del TCL.</u>

Sean X_i (i=1,2,..10) V.A. independientes uniformemente distribuidas en el intervalo (0,1).
Se quiere calcular:

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} x_i > 7\right) \text{ con } E[X_i] = \frac{1}{2} \quad \text{y } VAR(X_i) = \frac{1}{12}$$

Aplicando el TCL tendremos:

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 7\right) = P\left(\frac{\sum x_i - 10*0.5}{\sqrt{\frac{1}{12}}\sqrt{10}} > \frac{7-5}{\sqrt{\frac{10}{12}}}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{\sum x_i - 5}{\sqrt{\frac{10}{12}}} \leq \frac{2}{\sqrt{\frac{10}{12}}}\right) = 1 - f(2.2) = 0.0139$$