FACULTAD DE CIENCIAS - U.C.V. NOMBRE:______________________________
ESCUELA DE COMPUTACIÓN
PROBABILIDAD & ESTADÍSTICA C.I.__________________ SECC:_______
SEMESTRE 01-2011

PRIMER EXAMEN PARCIAL

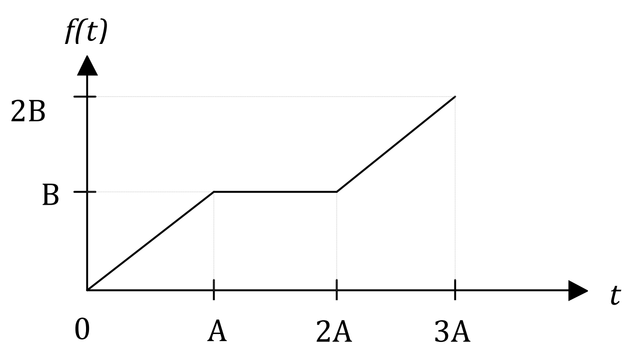
1.- De todos los estudiantes de una Universidad, 70% son mujeres y 30% son hombres. Suponga que 20% y 40% de las mujeres y hombres respectivamente fuman cigarrillos. ¿Cuál es la probabilidad de que si se toma un estudiante al azar, este sea:

a) Una mujer fumadora? **(1 punto)**

b) Una persona fumadora (sin importar sexo)? **(2 puntos)**

2.- Sea X una V. A. que sigue una distribución Bernoulli(p), Demuestre que VAR(X) = $p-p^2$ **(1,5 puntos)**

3.- Sea el dibujo de la función de densidad de probabilidad de una VA *t* la del gráfico siguiente:



a) Hallar el valor que debe tener *B* (en función de *A*) para que *f(t)* sea una función de densidad de probabilidad **(1 punto)**

b) Hallar la función de densidad de probabilidad de *f(t)* en función del parámetro *A* **(1 punto)**

c) Hallar E(t^2) **(2 puntos)**

d) Hallar la fda **(3 puntos)**

e) Hallar la $P\left(\frac{A}{2} < t < \frac{5}{2}A\right)$ **(1 punto)**

Sugerencia: Use el hecho de que un triángulo de lados a y b formando un ángulo recto tiene por área (a*b)/2 y que una rectángulo de lados a y b tiene por área a*b y también que una recta con pendiente m que pasa por el punto (Xo,Yo) tiene formula Y=m(X-Xo)+Yo. También puede usar VAR(X) = E(X^2) – $(E(X))^2$

4.- Una persona necesita comprar una caja de pastillas para aliviar un dolor en la espalda. La persona va a una tienda de una famosa red de farmacias en Caracas a buscar el medicamento donde venden una caja por día con probabilidad de conseguir la caja de 1/4. Asumiendo que la persona va cada día a la farmacia. Responda:

a) ¿Cuál es el número esperado de días que tendrán que pasar para encontrar el medicamento? **(1,5 puntos)**

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana (7 días) No consiga el medicamento? **(1,5 puntos)**

c) La persona toma un nuevo tratamiento y debe tomar 2 cajas. Cual es la probabilidad de conseguir exactamente 2 cajas antes de 10 días. **(1,5 puntos)**

5.- En base al sistema de monitoreo de cierto servidor web se sabe que los accesos a una determinada página Web ocurren de manera aleatoria siguiendo una distribución exponencial con tiempo promedio entre conexiones de 1.5 segundos. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en 5 segundos haya a lo sumo 2 conexiones? **(1,5 puntos)**

b) Si debemos detener el servicio por unos instantes para una tarea automática. ¿Que tiempo máximo debemos asignar a esta tarea de tal manera de asegurar con probabilidad de al menos 0.9 que no ocurrirá ninguna conexión durante la caída del servicio? **(1 puntos)**

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en 20 segundos ocurra una conexión por séptima vez si ya han transcurrido 17 segundos y han ocurrido 6 conexiones? **(1,5 puntos)**

Pregunta 1

M = “La persona es mujer”
H = “La persona es hombre”
F = “La persona es fumadora”

P(M) = 0,7
P(H) = 0,3
P(F|M) = 0,2
P(F|H) = 0,4

a) P(“Mujer Fumadora”) = $P(M\cap F)$ = P(F|M)P(M) = 0,2*0,7 = 0,14

b) P(“Una persona fumadora”) = P(F) = $P((F\cap H)U(F\cap M))$ = P(F|H)P(H) + 0,14 =0,3*0,4 + 0,14=0,12+0,14 = 0,26

Pregunta 2

$VAR(X) = E(X^2)-(E(X))^2$

Por definición de Esperanza

$E(X)=0(1-p)+1p=p$ y $E(X^2)=0^2(1-p)+1^2p=p$

Entonces
$VAR(X) = p-p^2$

Pregunta 3

a)
Por geometría
Area_triangulo1+Area_rectangulo+Area_trapecio = 1
➔ A*B/2 + A*B + (A*B+A*B/2) = 1
➔ 3AB = 1
➔ B = 1/(3A)

b)
Analizando la primera recta inclinada (Entre 0 y A)
La pendiente $m = B/A = 1/(3A^2)$
Esa recta pasa por el punto (0,0) al sustituir en la ecuación de la recta queda

$$y = \frac{1}{3A^2}(x-0)+0 = \frac{x}{3A^2}$$

Analizando la segunda recta horizontal (Entre A y 2A)
Es una constante

$$y = \frac{1}{3A}$$

Analizando la tercera recta inclinada (Entre 2A y 3A)
La pendiente m = B/A = $1/(3A^2)$ (la misma que en la primera recta)
Esa recta pasa por el punto (2A,1/(3A)) al sustituir en la ecuación de la recta queda

$$y = \frac{1}{3A^2}(x - 2A) + \frac{1}{3A} = \frac{(x - A)}{3A^2}$$

Ahora la f(t) queda

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{3A^2}, & si\ 0 < t \leq A \\ \dfrac{1}{3A}, & \text{si A<t≤2A} \\ \dfrac{t - A}{3A^2}, & si\ 2A < t \leq 3A \\ 0, & cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

c)

$$E(t^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^A t^2 \frac{t}{3A^2} dt + \int_A^{2A} t^2 \frac{1}{3A} dt + \int_{2A}^{3A} t^2 \frac{t - A}{3A^2} dt$$

$$= \frac{1}{3A^2}\left(\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^A + \frac{1}{3A}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_A^{2A} + \frac{1}{3A^2}\left(\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_{2A}^{3A} - \frac{A}{3A^2}\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{2A}^{3A}$$

d)

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

En el intervalo 0,A

$$\int_0^t \frac{x}{3A^2} dx = \frac{1}{3A^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^t = \frac{x^2}{6A^2}$$

En el intervalo A,2A

$$\int_A^t \frac{1}{3A} dx = \frac{1}{3A}(x)\Big|_A^t = \frac{t - A}{3A}$$

y hay que sumarle lo acumulado de 0 hasta A que es 1/6

En el intervalo 2A,3A

$$\int_{2A}^t \frac{x - A}{3A^2} dx = \frac{1}{3A^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{2A}^t - \frac{A}{3A^2}(x)\Big|_{2A}^t = \frac{t^2 - 4A^2}{6A^2} - \frac{A(t - 2A)}{3A^2}$$

$$= \frac{t^2 - 2At - 4A^2 + 4A^2}{6A^2} = \frac{t^2 - 2At}{6A^2}$$

y hay que sumarle lo acumulado de 0 hasta 2A que es ½
Finalmente queda

$$F(t) = \begin{cases} 0, & si\ t < 0 \\ \dfrac{t^2}{6A^2}, & \text{si } 0 \leq t < A \\ \dfrac{1}{6} + \dfrac{t-A}{3A}, & \text{si } A \leq t < 2A \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{t^2 - 2At}{6A^2}, & \text{si } 2A \leq t \leq 3A \\ 1, & \text{si } t > 3A \end{cases}$$

e)

$$P\left(\frac{A}{2} < t < \frac{5}{2}A\right) = F\left(\frac{5}{2}A\right) - F\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{5}{2}A\right)^2 - 2A\left(\frac{5}{2}A\right)}{6A^2} - \frac{\left(\frac{A}{2}\right)^2}{6A^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\frac{25A^2 - 20A^2 - A^2}{4}}{6A^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Pregunta 4

ÉXITO = “La persona va un día y consigue la caja del medicamento”
P(ÉXITO) = ¼

a)
Sea X = “Número de días que se va a la farmacia hasta encontrar el medicamento”
Entonces X~Geométrica(p=1/4)
Se pide E(X) = 1/p = 1/(1/4) = 4 días

b)
Sea Y = “Número de días que se encuentra el medicamento en una semana”
Entonces Y~Binomial(p=1/4,n=7)
Se pide P(Y=0) = $(3/4)^7$

c) Sea W = “Número de días que se necesitan para encontrar 2 cajas del medicamento”
Entonces W~BinomialNegativa(p=1/4,r=2)
Se pide

$$P(W < 10) = \sum_{i=2}^{9} \binom{i-1}{1} \left(\frac{3}{4}\right)^{i-2} \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

Pregunta 5

Sea T = “Tiempo entre las conexiones”
Entonces E(T) = 1,5 = 3/2 = 1/λ
➔ λ = 1/(3/2) = 2/3 de conexiones por segundo

a)
Sea X = “Número de conexiones en t segundos”
Entonces t=5 y X~Poisson((2/3)*5)
Se pide

$$P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^{i} e^{-\frac{10}{3}}}{i!}$$

b)
Sea Y = “Número de conexiones en t segundos”
Entonces Y~Poisson((2/3)*t)

$$0{,}9 = P(Y = 0) = \frac{\left(\frac{2t}{3}\right)^{0} e^{-\frac{2t}{3}}}{0!} = e^{-\frac{2t}{3}}$$

$$\rightarrow \ln(0{,}9) = -\frac{2t}{3} \rightarrow t = -\frac{3}{2}\ln(0{,}9)$$

c)
El evento es equivalente a que ocurra una conexión antes de los 3 segundos (de 17 al 20)

Se pide

$$P(T < 3) = 1 - e^{-\frac{2*3}{3}} = 1 - e^{-2}$$