Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Computación
Probabilidad y Estadística
Práctica Nº 0

Repaso de Combinatoria y Probabilidades

Objetivos de la práctica:

Objetivo general:

El objetivo de esta práctica es dar al un repaso de los conceptos básicos de teoría combinatoria y la teoría de las probabilidades, incluyendo modelo de Laplace, probabilidades condicionales e independencia estadística estudiados en la asignatura Matemáticas Discretas II

Objetivos específicos:

- Identificar la naturaleza del problema en términos de ordenamiento y reposición, así como aplicar los principios de adición y multiplicación.
- Identificar la naturaleza finita o infinita del espacio muestral estudiado.
- Aplicar el Modelo de Laplace para determinar los valores de probabilidad, para espacios muéstrales con resultados finitos y equiprobables.
- Aplicar los axiomas y propiedades del espacio de probabilidad, para determinar los valores de probabilidad asociados a determinados eventos.
- Identificar la naturaleza excluyente o independiente de eventos sobre un experimento dado.
- Aplicar la definición de *probabilidad condicional* en problemas cuyos resultados estén o no condicionados por la ocurrencia o no de eventos previos.
- Introducir el concepto de *probabilidades totales.*
- Comprender el significado y aplicaciones del *Teorema de Bayes.*
- Aplicar el teorema de Bayes y el concepto de probabilidades totales en problemas cuyo espacio muestral pueda particionarse.

Desarrollo de la práctica:

1. Hay *20* candidatos para ocupar *3* cargos distintos. ¿De cuántas maneras diferentes se podrían ocupar los tres cargos?

2. Se cuenta con *12* analistas de sistemas y se desea asignar *3* analistas al trabajo I, *4* analistas al trabajo II y *5* analistas al trabajo III. ¿De cuántas maneras diferentes se puede efectuar esta asignación?

3. De cuatro manzanas rojas, 5 verdes y 6 amarillas, ¿cuantas selecciones de 9 manzanas son posibles si se deben seleccionar 3 de cada color?

4. Sea *S* el conjunto de todos los *strings* de longitud *10*, formados con caracteres del alfabeto *{0,1,2}*.
   Por ejemplo, un elemento de *S* puede ser el *strings 0211012201*
   a) ¿Cuántos elementos tiene *S*?
   b) ¿Cuántos *strings* en *S* tienen exactamente cinco *0's* y cinco *1's*?
   c) ¿Cuántos *strings* en *S* tienen exactamente tres *0's* y un *1*?
   d) ¿Cuántos *strings* en *S* tienen al menos un *0*, un *1* y un *2*?

5. Verifique que las siguientes igualdades son ciertas y explique el significado de las mismas en términos de la teoría combinatoria:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

6. Un fabricante de automóviles esta preocupado por el posible retiro de su sedan de 4 puertas de mayor venta, si hubiera un retiro, hay una probabilidad de 0.5 de que haya un defecto en el sistema de frenos, de 0.18 en la trasmisión , de 0.17 en el sistema de combustible y 0.4 en alguna otra área

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el defecto este en los frenos o en el sistema de combustible, si la probabilidad de defecto simultaneo en ambos sistemas es de 0.2
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya defecto en los frenos o en el sistema de combustible?

7. En el popular juego *Kino*, cada cartón consta de *15* números entre *1* y *25*. En el sorteo se extraen al azar *15* balotas numeradas del *1* al *25*. Son premiados aquellos cartones que tengan *15* aciertos (1º premio), *14* aciertos (*2*º premio), *13* aciertos (*3*º premio) y *12* aciertos (*4º* premio).

   a) ¿Cuántos cartones diferentes puede haber en total?
   b) ¿Cuántos cartones ganadores diferentes puede haber con *14* aciertos?
   c) ¿Cuántos cartones ganadores diferentes puede haber con *13* aciertos?
   d) ¿Cuántos cartones ganadores diferentes puede haber con *12* aciertos?

8. Un mecanismo puede ponerse en 4 posiciones, digamos A, B, C y D. hay 8 de tales mecanismos en un sistema
   a) ¿De cuantas maneras puede instalarse este sistema?
   b) Supóngase que dichos mecanismos están instalados en algún orden (lineal) pre asignado de cuantas maneras posibles se instalan los mecanismos si dos mecanismos adyacentes no están en la misma posición

c) ¿Cuántas maneras son posibles si solo se usan las posiciones A y B con la misma frecuencia?

d) ¿Cuántas maneras son posibles si solo se usan dos posiciones diferentes y una de ellas aparece mas menudo que la otra?

9. Considere el juego de poker de *5* cartas, tomadas de un mazo de *52* cartas (no se incluyen comodines)

a) ¿Cuántas manos de poker hay?

b) ¿De cuántas formas se puede obtener un doble (2 cartas del mismo número) o un triple (3 cartas de un mismo número)?

c) ¿De cuántas formas se puede obtener un poker (4 cartas del mismo número)? ¿De cuántas formas se puede obtener un *full-house* (un doble y un triple en la misma mano)?

d) ¿De cuántas formas se puede obtener un color (todas las cartas del mismo palo)?

e) ¿De cuántas formas se puede obtener una escalera (los números de las cartas de manera correlativa)?

f) ¿De cuántas formas se puede obtener una escalera real (se obtienen las cartas 10, J, K, Q, A)?

g) ¿De cuántas formas se puede obtener una flor imperial (escalera real, con todas las cartas del mismo palo)?

h) ¿De cuántas formas se puede obtener una escalera de color (escalera con todas las cartas del mismo palo que no sea flor imperial)?

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Computación
Probabilidad y Estadística
Práctica Nº 0

Problemas de probabilidades, modelo de Laplace

1. Describa el espacio muestral asociado al lanzamiento de dos dados. Describa el espacio muestral asociado al lanzamiento de dos dados, si el segundo es un 6. En ambos espacios muéstrales describa los siguientes eventos:

   a) Al menos un 6
   b) El primero es par
   c) El primero es par o 3
   d) El primero es par y el segundo es 3

2. Un juego consiste en lanzar un dado y una moneda. Se gana si se obtiene cara y un seis, o sello y un uno. ¿Cuál es la probabilidad de ganar algún juego si se hacen 2 intentos?

3. Diez balotas numeradas del 1 al 10 se meten en un biombo. Se sacan 2 balotas al azar, sean X e Y los números de la primera y segunda balota respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que $X + Y = 10$ si las balotas se sacan sin reemplazo? ¿Y si se sacan con reemplazo?

4. Un dado es cargado de tal forma que la probabilidad de que salga una cara es proporcional al número de puntos en la misma; así, es dos veces más probable que salga un 6 a que salga un 3, por ejemplo. ¿Cuál es la probabilidad de que con este dado salga un número par?

5. En un salón de conferencias hay N personas. ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más personas tengan la misma fecha de cumpleaños? Calcule el valor para $N = 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$

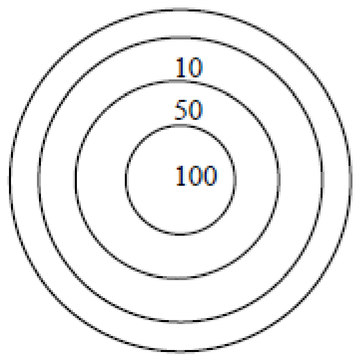
6. En un juego de dominó sólo hay 7 números posibles (del 0 al 6). Si tuviésemos un nuevo estilo de Dominó, con n números posibles (del 0 al n-1), ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar aleatoriamente una ficha cualquiera del juego, esta resulte ser la ficha *[n-1| n-1]?*

7. En un sistema operativo multiusuario, cada usuario posee un login y un password conformados de la siguiente manera: el login debe ser distinto para cada uno de los usuarios y debe contener entre cuatro y siete caracteres y los passwords deben tener de tres a cinco dígitos diferentes pudiendo usar solamente los dígitos *1, 2, 3 , 5, 7*.

   a) Calcule cuantos usuarios pueden existir en un servidor Pex.
   b) Cuántas combinaciones distintas de login y password pueden existir
   c) Diga cuál es la probabilidad de que dos o más usuarios tengan el mismo password

d) Diga cuál es la probabilidad de que un usuario posea un password de cuatro dígitos impar.

8. Un juego de tiro al blanco, consiste en disparar desde una distancia prudencial, un rifle de alta precisión una sola vez. El blanco esta formado por un circulo de radio *40 cm.* y tres círculos concéntricos de radios *10, 20* y *25 cm.* respectivamente. El puntaje se distribuye de la siguiente manera:



Asumiendo que todos los tiros caen en alguna parte de la diana de manera en que cualquier parte tiene la misma probabilidad de caer. Halle la probabilidad de que el jugador:

a) Gane con *100* puntos.
b) Obtenga *50* puntos.
c) Sólo consiga *10* puntos.

<u>Problemas de probabilidad condicional e independencia estadística</u>

1. La contaminación de los ríos de Venezuela es un problema de hace varios años, considere los eventos siguientes eventos. A = {el *rio está contaminado*}, B = {una *prueba en una muestra de agua detecta contaminación*}, C = {se *permite la pesca*}. Suponga que $P(A)=0.3$, $P(B\mid A)=0.75$, $P(B\mid A^c)=0.2$, $P(C\mid A\cap B)=0.2$, $P(C\mid A^c\cap B)=0.15$, $P(C\mid A\cap B^c)=0.8$, $P(C\mid A^c\cap B^c)=$ 0.9

a) Encuentre $P(A\cap B\cap C)$
b) Encuentre $P(B^c\cap C)$
c) Encuentre $P(C)$
d) Encuentre la probabilidad de que el rio este contaminado, dado que se permite la pesca y que la prueba de la muestra no detecte contaminación.

2. Se realizan m lanzamientos de n dados independientes. conteste a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan n veces el mismo número en los n dados?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan k veces el mismo número en los n dados?
(asuma que $k < n$)

3. Suponga que durante la ejecución de un proceso pueden ocurrir sólo n interrupciones distintas. Si se sabe que la ocurrencia de cada interrupción es equiprobable e independiente a la ocurrencia de cualquier otra. Determine:

a) Probabilidad de que al menos una vez haya ocurrido la interrupción *(k-1)* en n ocurrencias de alguna interrupción $1, 2, 3, ..., n$
b) Aproxime un valor para dicha probabilidad, tomando en cuenta que n tiende a ∞

4. Suponga que un multiprocesador se mantendrá operativo si al menos la mitad de sus procesadores se mantiene funcionando. Cada procesador fallará con una probabilidad $1-p$ en forma independiente de los demás. ¿Para qué valores de p es preferible tener un multiprocesador de 4 procesadores que uno de 2?

5. Una muestra aleatoria de 200 adultos se clasifica como sigue según sexo y nivel educativo:

Educación	*Hombre*	*Mujer*
Primaria	38	45
Secundaria	28	50
Universidad	22	17

Si de este grupo se elige una persona al azar, calcule la probabilidad de que:
a) La persona sea hombre si se sabe que tiene una educación universitaria.
b) La persona tiene educación universitaria si se sabe que es mujer.

6. Se sabe que el *25%* de los hombres y el *10%* de las mujeres sufre de astigmatismo. Suponga que se tiene un grupo de n pacientes de astigmatismo y se toma un paciente al azar. Determine la probabilidad de que el paciente sea hombre si:

a) Hay la misma cantidad de hombres que de mujeres.
b) Hay dos veces más mujeres que hombres.
c) Hay m hombres y w mujeres, tal qué $m + w = n$

7. Demuestre formalmente las siguientes proposiciones: (Asuma que *E, F, G* son eventos de un espacio muestral Ω

a) Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son eventos independientes, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - P(E_i)\right)$$

b) $P(E \mid F) = P(E \mid F \cap G)P(G \mid F) + P(E \mid F \cap G^c)P(G^c \mid F)$

c) Si $P(E \mid F) = P(F \mid E) \wedge P(E \cup F) = 1 \wedge P(E \cap F) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(E) > \frac{1}{2}$

8. Se tiene una colección de *n* monedas, de las cuales, una tiene dos *sellos*; mientras que las *n-1* monedas restantes son normales (tienen un *sello* y una *cara*). Suponga que se escoge una moneda al azar de esta colección y se lanza sucesivamente. Se observa que el resultado de los lances es *sello* en los primeros *k* intentos. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda escogida sea la que tenía dos sellos? ¿Cuál sería el resultado si la colección tuviera $m < n$ monedas con doble *sello*?

9. *Luxco* es una corporación que se dedica a la producción de bombillas eléctricas y en la actualidad sus dos productos líderes en ventas son las *lámparas argenta (LA)* y los *bombillos softglow (BS)*. Actualmente, la empresa tiene dos fábricas; en la fábrica *A* se despachan lotes que contienen *1000 LA* y *2000 BS* cada uno, mientras que en la fábrica *B*, los lotes que se despachan contienen *2000 LA* y *1000 BS*. El departamento de control de calidad, ha determinado que en la fábrica *A*, hay en promedio, *2 LA* y *11 BS* defectuosos por lote, mientras que en la fábrica *B* el promedio de unidades defectuosas es de *5 LA* y *6 BS* por lote. El gerente de la fábrica *A* opina: "Nuestra fábrica es la más productiva. En nuestras instalaciones, el porcentaje de *LA* defectuosas es de apenas *0.2* y el porcentaje de *BS* defectuosas es de *0.55*; mientras que en la otra fábrica el porcentaje de *LA* y *BS* defectuosas es *0.25* y *0.60* respectivamente. Somos mejores en la producción de *LA* y *BS* por un *0.05%* de cada uno" "¡Un momento!", espeta el gerente de la fábrica *B* "Cada lote de *3000* bombillos producidos en nuestra fábrica en promedio tiene apenas *11* unidades defectuosas, mientras que cada lote de la fábrica *A* tiene *13* unidades defectuosas. Por lo tanto, nuestro porcentaje de fallas de apenas *0.37%* supera a la otra fábrica que tiene una tasa de fallas de *0.43%*"

   ¿Cuál de los *2* gerentes tiene la razón?

Problemas de aplicación del Teorema de Bayes:

1. Un suero de la verdad es suministrado a un sospechoso. Se sabe que este suero es *90%* confiable cuando la persona es culpable y *99%* confiable si la persona es inocente. Si el sospechoso fue seleccionado de un grupo de sujetos de los cuales sólo el *5%* han cometido un crimen y el suero indica que él es culpable, ¿Cuál es la probabilidad de que él sea inocente?

2. De todos los estudiantes de una Universidad, *70%* son mujeres y *30%* son hombres. Suponga que *20%* y *25%* de las mujeres y hombres respectivamente fuman cigarrillos. ¿Cuál es la probabilidad de que si se toma un estudiante al azar, este sea:

   a) Una mujer fumadora?
   b) Un hombre fumador?
   c) Una persona fumadora (sin importar sexo)?

3. El *8 %* de los días laborables se presentan fallas de funcionamiento en un sistema de cómputo de una Universidad. Estas fallas son de tres tipos: hardware*, software,* ó *electrónicas (alimentación),* y nunca se presentan más de una de estas en un día. Ahora, el sistema debe suspender el servicio *73%* de los días cuando se experimentan problemas de hardware, *12%* de las veces cuando se presentan problemas de software, y *88%* del tiempo ante fallas electrónicas. Históricamente, los ingenieros de mantenimiento han observado que una falla de software es cinco veces más probable que un problema de hardware y *2.5* veces más frecuente que una falla electrónica.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema no suspenda su servicio en un día?
   b) Si el sistema ha dejado de prestar su servicio diario, ¿cuál es la causa más probable de suspensión?

4. En la final del campeonato abierto de tenis, dos jugadores se enfrentan hasta que uno de ellos gane un total de *3* juegos. Note que esto implica que al menos se realizan *3* juegos y a lo sumo *5* juegos. Suponga que el jugador A tiene una probabilidad p de ganar un juego con $0<p<1$. Responda las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador A gane el campeonato?
   b) Se sabe que el jugador A ganó la serie ¿Cuál es la probabilidad de que se hayan jugado exactamente 4 juegos?

5. Un canal de comunicación binario transmite señales denotadas como *0* ó *1*. Debido al ruido, un *0* transmitido es algunas veces recibido como un *1* y viceversa. Para un canal dado, asuma una probabilidad de *0.94* de que si un *0* es transmitido este es recibido correctamente como un *0,* y una probabilidad de *0.91* de que si un *1* es transmitido este es recibido correctamente como un *1*. Asuma una probabilidad de *0.45* deque un *0* es transmitido. Hallar:

   a) Probabilidad de que un *1* es recibido.
   b) Probabilidad de que un *1* fue transmitido, dado que un *1* fue recibido
   c) Probabilidad de un error en la transmisión (recepción incorrecta).

6. Entre dos sistemas A y B se establece un canal de comunicación. El canal es propenso a errores con una frecuencia del *10%*. Los mensajes son enviados desde A hasta B con un código desconocido para B, el cual tratará de descifrar. Si el mensaje llega sin errores, existe una probabilidad de *0.75* de que pueda ser decodificado. Si el mensaje

llega con algún error, puede ser que éste sea detectado, en este caso, la probabilidad de decodificar el mensaje es *0.50*. Si no se detecta el error la probabilidad de decodificar elmensaje es *0.05*. Cuando ocurre un error, éste se detecta con probabilidad *0.30*. Si se descifra con éxito el mensaje, ¿cuál es la probabilidad de que se haya detectado un error de transmisión? Nota: Se habla de detección de errores sólo cuando éstos ocurren.

7. En cierta región del país se sabe, por experiencias del pasado, que la probabilidad de seleccionar al azar una persona con cáncer es *0.05*. Si la probabilidad de que un doctor diagnostique correctamente a una persona con cáncer es *0.78* y la probabilidad de que erróneamente diagnostique cáncer a una persona sana es *0.06*:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de un diagnóstico de cáncer para una persona cualquiera?
   b) ¿Cuál es la de que una persona con diagnóstico de cáncer realmente tenga cáncer?

8. Suponga que los cuatros inspectores de una fábrica de películas colocan la fecha de caducidad en cada paquete de película al final de la línea de montaje. Javier, que coloca la fecha de caducidad en 20% de los paquetes, no lo pone una vez cada 200 paquetes. Alberto, que la coloca en 60% de los paquetes, no la coloca una vez en cada 100 paquetes. Oscar, quien la coloca en 15% de los paquetes, no lo hace una vez en cada 90 paquetes; Gustavo, que fecha 5% de los paquetes, no lo hace una vez en cada 200 paquetes. Si un consumidor se queja de que su paquete de película no muestra la fecha de caducidad
   a) ¿cuál es la probabilidad de que haya sido inspeccionado por Javier?
   b) ¿cuál es la probabilidad de que haya sido inspeccionado por Gustavo, si se sabe que no fue Oscar?
   c) ¿cuál es la probabilidad de que no tenga la fecha de caducidad, si no fue inspeccionado por Alberto?
   d) ¿Cuántas películas se espera que no tengan fecha de caducidad de 25.000 películas?

9. En el Hospital Clínico Universitario, se está haciendo una prueba piloto de un nuevo test para la detección de la Hepatitis (tipo A, B y C). El test consta de un examen de sangre y uno de orina. Se determina que el paciente padece de hepatitis cuando ambas pruebas dan positivo y se determina que está sano cuando ambas pruebas dan negativo. Sin embargo, es posible que los resultados de ambas pruebas sean distintos, en cuyo caso la prueba falla. Luego de aplicar el examen por un año sobre un grupo de pacientes, se obtienen las siguientes estadísticas (+ denota que el examen dio positivo, - denota que el examen dio negativo. S denota examen de sangre. O denota al examen de orina)

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Computación
Probabilidad y Estadística
Práctica Nº 0

Resultados del test sobre los pacientes enfermos

tipo de hepatitis	pacientes enfermos	S + / O +	S + / O -	S - / O +	S - / O -
A	3215	2110	301	704	100
B	2125	396	132	1187	410
C	4660	510	3568	73	509
total	10000				

a) Calcule la probabilidad de que un paciente tenga hepatitis A

i. Si una sola de las pruebas dio negativo
ii. Si ambas pruebas dieron negativo
iii. Si ambas pruebas dieron positivo.
iv. Si la prueba de sangre dio negativo y la prueba de orina dio positivo.
v. Si la prueba de orina dio negativo y la prueba de sangre dio positivo.

b) Repita el ejercicio anterior para hepatitis B y hepatitis C.

c) Calcule la probabilidad de que la prueba de un resultado indeterminado, para cada uno de los tipos de hepatitis.

d) De acuerdo a los exámenes anteriores determine para cuál de los tipos de hepatitis el examen es más certero.

GDPE Marzo 2011