Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Computación
Probabilidad y Estadística
Práctica Nº 1

Variables Aleatorias

Objetivos de la práctica:

Objetivo general:
Al finalizar la práctica, el estudiante deberá conocer el concepto de variable aleatoria discreta y continua,
el concepto de distribución de probabilidad, entender el cálculo de esperanzas y varianzas de v.a..

Objetivos específicos:
• Identificar la naturaleza discreta o continua de una variable aleatoria dada.
• Verificar las condiciones bajo las cuales la *fda* de una variable aleatoria es una expresión válida.
• Hallar las funciones de probabilidad, densidad de probabilidad y acumulada de una variable aleatoria.
• Calcular esperanzas y varianzas de *v.a's*.

Desarrollo de la práctica:

1. En una urna hay cinco pelotas numeradas del *1* al 5. Considere el experimento de extraer dos pelotas al azar. Determine la distribución de probabilidad para cada una de las siguientes situaciones cuando las pelotas se extraen con reemplazo y cuando se extraen sin reemplazo:
   a. Defina una *v. a.* que modele el mayor de los números seleccionados.
   b. Defina una *v. a.* que modele la suma de los dos números seleccionados.
   c. Determine la distribución de probabilidad y calcule la esperanza y la varianza para cada una de las variables aleatorias.

2. Se tiene un servidor donde la probabilidad de recibir un paquete con errores es p. Suponga además, que se reciben n paquetes. Se define la variables aleatorias X como: $X =$ *Número de paquetes recibidos con errores.*
   a. Halle la *fdp* para X. Verifique que efectivamente es una función de densidad válida.
   b. Calcule la esperanza y la varianza de X.
   c. Suponga que $n = 5$ y $p = 0.15$. ¿Cuánto vale la probabilidad de que se reciban 2 paquetes con errores? ¿y cuál es esperanza? .

   Solucion: b) 0,75 0,635; c) 0,1382;

3. Suponga que se tiene un servidor donde se tiene una probabilidad p de recibir un paquete con errores. Se define una variable aleatoria X tal que: $X =$ *Número de paquetes recibidos sin errores antes del primer paquete con errores*. Halle la *fdp* de la variable aleatoria X, y

verifique que efectivamente es una *fdp* válida. Calcule la esperanza y la varianza de dicha distribución.

Ayuda: $\sum_{j=0}^{\infty} r^j = \frac{1}{1-r}$, $|r|<1$

4. Supóngase que el 5% de los artículos que salen de una línea de producción son defectuosos. Se escogen 10 de tales artículos y se inspeccionan.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentran a la sumo dos defectuosos?
   b) Se sabe que la producción es rechazada si se encuentran más de 5 artículos defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que la producción sea rechazada? *Solucion a) 0,988; b) 0,000002*

5. Se tienen dos dados cargados (no legales), tales que para cada dado, el chance de que salga el número *6* en un lance, es el doble del chance de que salga cualquier otro número. Suponga que se realiza un lance de estos dados y defina la *v.a. X = "El máximo valor de los dos dados"*.

   a. Indique el dominio y rango de *X*.
   b. Determine la función de probabilidad de *X* y bosqueje su gráfica.
   c. Determine la función de probabilidad acumulada de *X*.
   d. Calcule *E[X]*

6. Un famoso apostador recomienda la siguiente estrategia de juego para ganar en la ruleta: en el primer turno el jugador debe apostar *Bs. X* a los rojos. Si en la ruleta sale un rojo (lo cual ocurre con probabilidad 18/38), el jugador debe tomar su premio de *Bs. 2X* y abandonar el juego. Si el jugador pierde, debe apostar de nuevo *Bs. X* a los rojos en los dos próximos turnos y luego abandonar el juego. Sea G una variable aleatoria definida por la ganancia d euna serie de apuestas según esta estrategia:

   a) Calcule $P(G > 0)$.
   b) ¿Tiene sentido esta estrategia? Justifique.
   c) Halle E[G].
   Soluciones: a) 0,5917; b) -x(741/6859)

7. Sea *X* una variable aleatoria, cuyo rango es el conjunto $\{1,2,3,\ldots\}$ y con *fdp* definida como $P(X=j) = 1/2^j$ donde $j \in \{1,2,3,\ldots\}$. Se quiere que usted calcule:

   a. *P (X es par).*
   b. *P(X >5)*
   c. *P(X es divisible por 3)*
   d. Probar que dados $s, t \in N$, entonces $P(X>s+t \,/\, X>s) = P(X\geq t)$

8. Se lanzan una serie de cohetes hasta que ocurre el primer lanzamiento exitoso. Si esto no sucede en *5* ensayos, el experimento se detiene. Supóngase que la probabilidad de tener un lanzamiento exitoso es de *0.8* y que éstos son independientes. El costo del primer lanzamiento es Bs. *K*, mientras que los siguientes lanzamientos cuestan Bs. *K/3* cada uno. Además, por cada lanzamiento exitoso, se adquiere un conocimiento valorado en Bs. *C*. Sea *T* la variable aleatoria definida por *T = Costo neto del experimento en Bs*.

   a) Obtenga una expresión para la *fdp* de *T*.
   b) Calcule la esperanza y varianza de *T*.
   c) Calcule la *fda* de la distribución de *T*.

9. Un experimento consta de *n* ensayos independientes. Debido al *aprendizaje* en los ensayos, la probabilidad de obtener un resultado exitoso aumenta con el número de ensayos realizados. Así, definimos la siguiente probabilidad:

$$P\text{ (éxito en la i-ésima repetición del ensayo)} = \frac{i+1}{i+2}$$

   a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener *3* éxitos en *4* intentos?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer éxito se dé en el *3º* intento?

10. Se X una variable aleatoria discreta. Determinar el valor de K para que la función f(x)=1/k, x = 1,2,3,4 sea la función de probabilidad de X. Determinar $P(1 \leq X \leq 3)$.

Solucion k=0,48 ; P(1≤X≤3)=0,88

11. En un juego de apuestas, se paga *$3*, si se saca una sota y un rey del tope de un mazo de cartas de póquer; se pagan *$5* si se saca un rey y un as, y si se saca cualquier otro par de cartas, el apostador pierde *$K.* ¿Cuanto debería ser *$K* si se quiere que el juego sea atractivo para el apostador?

12. Supongase que la maquina 1 produce (diariamente) el doble de artículos que la maquina 2. Sin embargo, cerca del 4% de los articulos de la máquina 1 tienden a ser defectuosos, mientras que la maquina 2 en promedio solo produce 1 artículo defectuoso de cada 100. Supongamos que se combina la producción diaria de las dos maquinas, se toma una muestra aleatoria de 10 del resulatado combianado. ¿ Cual es la probabilidad de que esta muestra contenga 2 defectuosos?

Solución: 0,3174

13. Suponiendo que la duración en horas de cierto tubo de radio es una variable aleatoria continua X con fdp $f(x) = 100/x^2$, $x > 100$ y 0 para cualquier otro valor.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tubo dure menos de 200 horas si se sabe que el tubo todavía funciona después de 150 horas de servicio?

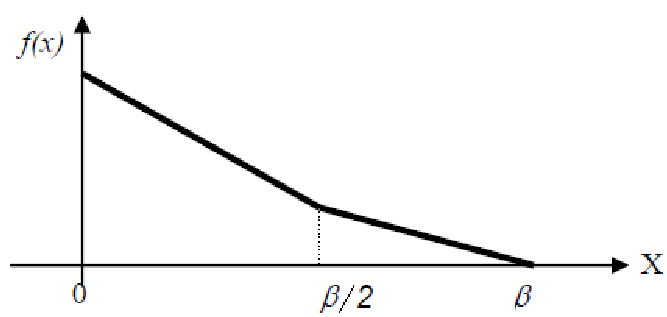
b) ¿Cuál es la probabilidad de que si se instalan 3 de tales tubos en un conjunto, exactamente uno tenga que ser sustituido después de 150 horas de servicio?
c) ¿Cuál es el número máximo de tubos que se pueden poner en un conjunto de modo que haya una probabilidad 0.5 de que después de 150 horas de servicio todos ellos todavía funcionen?

14. Determine para qué valores de *C* la siguiente función es una densidad de probabilidad (*fdp*) válida:

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{C}{\sqrt{y}}, 0 < y < 4 \\ 0, \mathit{en\ caso\ contrario} \end{cases}$$

a) Halle la función de distribución de probabilidad acumulada (*fda*) *F(y)*
b) Calcule *P(Y > 1), P (Y > 4), F(5/2)*
c) Calcule la esperanza y la varianza de la v.a. Y.
Solucion: C=4/3; P(Y > 1)=1; P (Y > 4)=0; F(5/2)=0,933; E[Y]=1,848; VAR(Y)= 1,848

15. Una empresa de consultoría tiene el siguiente problema. Se sabe que la *fdp* del tiempo *X* que dura funcionando un componente electrónico tiene una gráfica tal como la que se bosqueja a continuación:



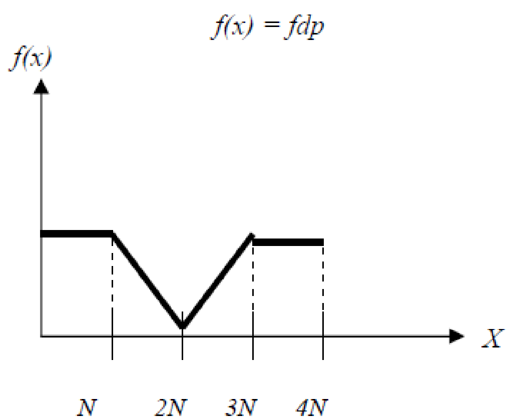
En este modelo el componente será reemplazado (sirva o no) al final de un tiempo β. Además, a la mitad de dicho tiempo se realiza un proceso de mantenimiento que cambia la velocidad de desgaste. El valor de β no puede ser cualquiera, y por motivos prácticos debe ser tal que P(X > β/2) = 1/5

a. Escriba la expresión de la *fdp* de la *v.a. X.*
b. Hallar *f(0), f(*β/2) y P(X = 0), P(X = β/2)
c. Escriba la expresión para la *fda F(x)* correspondiente y dibuje su gráfica.
d. Para β=*3:* Calcule *P(1 ≤ X ≤ 2)* y calcule también la Esperanza y la Varianza de *X.*

16. Sea X una *v.a.* continua, tal que su función de densidad de probabilidad tiene una gráfica como la que se bosqueja a continuación:

   a) Dibuje la gráfica de la función de densidad acumulada de X en el espacio indicado para ella.
   b) Calcule las siguientes probabilidades:

      i. $P(X<N/4)$
      ii. $P(X>5N/2)$
      iii. $P(N/2<X<7N/2)$
      iv. $P(X=3N/2)$



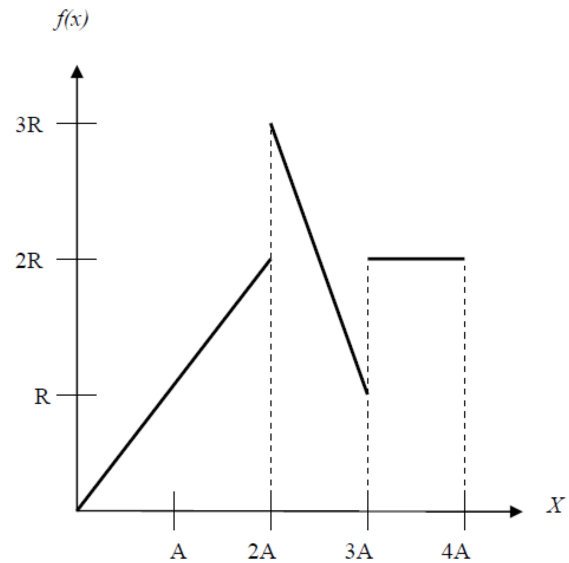
Solucion: *i)* *0,8333;* *ii)* *0,5416;* *iii)* *0,6666;* *iv)* *0*

17. Una variable aleatoria X tiene la siguiente *fda*:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{5}{3}x^2 & 0\le x\le k \\ 1 & x>k \end{cases}$$

   a. Determine el valor de k para que F sea una *fda* válida.
   b. Determine una *fdp* tal qué tenga como distribución acumulada a F.

18. Sea X una v.a. continua, cuya fdp se muestra en el siguiente gráfico (A es una constante real conocida):



a. Calcule el valor de *R*, tal que *f* sea una *fdp* válida.
b. Escriba la ecuación de *f*, la *fdp* de *X*.
c. Determine la ecuación de la función de densidad acumulada (*fda*) de *X* y dibuje su gráfica.
d. Calcule $P(\frac{3A}{2} < X < \frac{7A}{2})$

19. Halle y dibuje la gráfica correspondiente de la *fda F(x)* de una v.a. *X* discreta tal que

$$P(X = 0.5) = \frac{1}{4}, P(X = 1) = \frac{1}{2}, P(X = 2) = \frac{1}{8}, P(X = 4) = \frac{1}{8}$$

20. Determine cuál es la *fdp* cuya *fda* está definida por:

$$F(X) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x}, x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}, x > 0 \end{cases}$$