Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Computación
Probabilidad y Estadística
Práctica Nº 2

Distribuciones de variables aleatorias discretas con nombre propio

Objetivos de la práctica:

Objetivo general:

Al finalizar la práctica, el estudiante estará en capacidad de modelar fenómenos mediante el empleo de las distribuciones discretas Bernoulli, Binomial, Geométrica, Binomial Negativa, Uniforme Discreta, Hipergeométrica y Poisson.

Objetivos específicos:

- Identificar las situaciones en las que se requiera modelar un fenómeno, mediante una variable aleatoria de Bernoulli, una Binomial, Geométrica, Binomial Negativa y uniforme discreta.
- Identificar las situaciones en que se requiera modelar un fenómeno mediante una variable aleatoria hipergeométrica.
- Identificar situaciones en donde se requiera modelar un fenómeno mediante una variable aleatoria de Poisson.
- Conocer las expresiones para la fdp y fda de cada una de estas distribuciones.
- Determinar las características, esperanza y varianza de cada una de estas distribuciones.
- Establecer relaciones entre las variables aleatorias Bernoulli y Binomial.
- Establecer relaciones entre las variables aleatorias Geométrica y Binomial Negativa.
- Establecer relaciones entre las variables aleatorias Binomial y Poisson.

Desarrollo de la práctica:

Ejercicio 1

Para cada escenario descrito a continuación, indique cuál es la distribución que modela razonablemente la variable aleatoria y por qué. Dé un ejemplo.

1. Miles de productos envasados son producidos en una fábrica de alimentos. Sea X el número de productos mal envasados en una muestra de tamaño 40 seleccionados al azar.
2. Cuatro componentes electrónicos idénticos están conectados a un controlador que puede pasar de un componente dañado a uno del resto que esté en

funcionamiento. X indica el número de componentes que han fallado después de un período determinado de funcionamiento.
3. Sea X el número de accidentes que ocurren a lo largo de las carreteras durante un período de un mes.
4. Sobre la superficie de un chip semiconductor se producen defectos al azar. Sin embargo, sólo el 80% de los defectos se pueden encontrar por pruebas. Sea X el número de chips en las que la prueba considera un defecto de una muestra de 40 chips.
5. Reconsiderar la situación (d). Ahora, suponiendo que en la muestra consta de chips con 0 ó 1 defectos.
6. En un canal de comunicación se producen errores en ráfagas que afectan a varios bits consecutivos. X indica el número de bits con error en la transmisión de 100000 bits.

Ejercicio 2

Una investigación hecha a las personas que compran computadoras en Venezuela, demostró que el 20% de ellos los prefiere de marca reconocida (Compaq, Acer, IBM, HP, etc.). ¿Cuál es la probabilidad de que más de la mitad de los siguientes 20 computadores que se compren en el país sean de marca reconocida?

Solución: $1 - \sum_{i=0}^{10} \binom{20}{i} (0.2)^i (0.8)^{20-i}$

Ejercicio 3

Al probar una cierta clase de material, para elaborar neumáticos de camión en un terreno escabroso, se encontró que 25% de los camiones terminaban la prueba con los neumáticos pinchados. De los siguientes 12 camiones a ser probados, determine la probabilidad que:

1. Menos de 4 camiones tengan algún pinchazo.
2. Más de 5 camiones tengan algún pinchazo.
3. De 3 a 6 camiones tengan algún pinchazo.

Ejercicio 4

Se selecciona al azar un comité de 3 profesores a partir de un grupo de 4 profesores asociados y 3 profesores titulares:

1. Defina y escriba una expresión para la variable aleatoria X = "Número de profesores titulares en el comité"

2. Calcule P(2 <= X <= 3)

Ejercicio 5

Una canal de comunicación transmite impulsos a una tasa de 20 por microsegundo. La probabilidad de error en la transmisión de un impulso es 0.000025. Halle lo siguiente:

1. La probabilidad de que en 1 microsegundo no haya errores.
2. La probabilidad de que en 2 microsegundos no haya errores.
3. La probabilidad de que en 2 microsegundos haya al menos 1 error.
4. ¿Cuántos errores se espera que ocurran durante 5 microsegundos de transmisión?
5. Reconsidere el problema ahora con un canal que trasmite 150 impulsos por microsegundo.

Ejercicio 6

La probabilidad de que una residente de cierta urbanización de Caracas tenga un perro es 0.25. Encuentre la probabilidad de que la décima persona entrevistada al azar en dicha urbanización, sea la quinta que tiene un perro.

Ejercicio 7

Un demonio de impresión (el proceso encargado de enviar trabajos a las impresoras conectadas al computador) hace solicitudes al sistema operativo hasta que éste le asigne la impresora. La probabilidad de que el sistema operativo rechace la solicitud de impresión es 0.3. Calcule:

1. La probabilidad de que el demonio de impresión deba realizar 10 solicitudes para poder enviar un trabajo a la impresora.
2. ¿Cuántas solicitudes debe hacer en promedio el demonio de impresión para enviar un trabajo a la impresora?
3. Suponga que el demonio tiene una cola con n trabajos de impresión. ¿Cuántas solicitudes espera que deba hacer, para lograr imprimir los n trabajos?

Ejercicio 8

Si a una persona se le reparten repetidas veces una mano de 13 cartas tomadas de un mazo de póker de 52 cartas ¿Cuántas cartas de corazones se espera que deba recibir en cada mano?

Ejercicio 9

Si la probabilidad de que una pareja tenga un hijo de sexo masculino es 0.7, determine la probabilidad de que:

1. El 4º hijo de una pareja sea su primer hijo varón.
2. El 7º hijo de una pareja sea su segunda hija hembra.

Solución:

Denotamos p= P(éxito) donde éxito = el hijo resulte de sexo masculino

p=0.7

X = "# de hijos hasta el primer varón."

X~Geométrica(p=0.7)

p(x)=$p(1-p)^{x-1}$ $si\ x > 0; 0\ en\ caso\ contrario$

a)$P(X=4) = (0.7)(0.3)^3$.

Y="# de hijos hasta la segunda hembra"

Y~BinomialNegativa(k=2,p=0.3)

p(y)=$\binom{y-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}$ $para\ y = k, k+1, k+2, \ldots.; 0\ en\ caso\ contrario$

Ahora nuestro éxito es: el hijo resultante sea de sexo femenino

→p=0.3

b)P(Y=7)=$\binom{6}{1}(0.3)^2(0.7)^5$.

Ejercicio 10

La probabilidad de que un programador apruebe un examen de certificación en alguna tecnología es de 0.7. Calcule la probabilidad de que:

1. El programador apruebe el examen en el tercer intento.
2. El programador apruebe el examen antes del cuarto intento.
3. El programador tenga que presentar el examen más de 4 veces, si se sabe que ya lo ha presentado más de 2 veces.

Ejercicio 11

Para el diseño de un programa de verificación de disco, se asume que la probabilidad de encontrar un sector dañado es 0.01. Suponiendo que se realiza una revisión sobre un disco, chequeando sus sectores aleatoriamente, se desea saber:

1. Si se revisan 100 sectores del disco ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del número de sectores dañados que pueden obtenerse? Analice su respuesta.
2. Si se han leído 5 sectores y ninguno está dañado ¿Cuál es la probabilidad de que se deban leer más de 7 sectores para encontrar el primer sector dañado?

Ejercicio 12

El número de clientes que llega a un banco sigue una distribución de Poisson con media 120 clientes por hora. En base a esto: ¿Cuál es la probabilidad de que en 6 minutos lleguen por lo menos cinco clientes?

Ejercicio 13

La probabilidad de que un satélite funcione correctamente, una vez de que es colocado en órbita, es 0.9. Supóngase que 5 de estos satélites son colocados en órbita y operan de manera independiente:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos el 80% de éstos funcionen correctamente?
2. Responda a la pregunta anterior asumiendo que se colocan en órbita 10 satélites. Repita el procedimiento para 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 satélites.
3. ¿Son inesperados estos resultados? ¿Por qué?

Ejercicio 14

Considere el siguiente segmento de programa en lenguaje pseudoformal: Se sabe que función Random(n) retorna un valor entero no negativo uniformemente distribuido entre 0 y n – 1, mientras que f() y g() son acciones que están bien definidas.

```
i ← 0
Mientras i < 20 hacer
  n = Random(15)
  si n < 10 ent
    f()
  sino
    g()
  fsi
  i ← i + 1
fmient
```

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la llamada a f() se realice más de 5 veces?
2. ¿Cuántas veces se espera que el algoritmo ejecute la acción g()?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que en la tercera iteración ejecute por primera vez la acción g()?

Ejercicio 15

Considere el siguiente segmento de programa en lenguaje pseudoformal:

```
i ← 0
Mientras Random(50) != 25 hacer
  i ← i + 1
fmientras
escribir('i vale ',i)
```

Donde la función Random(n) retorna un valor entero no negativo, distribuido uniformemente entre 0 y n – 1 Suponga que una corrida del algoritmo se considera exitosa cuando el valor de i mostrado por pantalla es mayor que 5.

1. Calcule la probabilidad de que una corrida del algoritmo sea exitosa.
2. En promedio cuántas corridas deben hacerse antes de obtener la primera corrida exitosa.
3. En promedio cuántas corridas deben hacerse antes de obtener la 3ª corrida exitosa.

4. Si se hacen 10 corridas del algoritmo, ¿Cuál es la probabilidad de tener al menos 3 corridas exitosas?

Ejercicio 16

Una carnicería adquiere pollos congelados de dos proveedores distintos. Se sabe que el proveedor A, surte el 70% de los pollos a la carnicería, mientras que el proveedor B surte el 30% restante. En un estudio sanitario realizado recientemente, se determinó que el 15% de los pollos producidos por el proveedor A y el 10% de los producidos por el proveedor B, están contaminados con la bacteria E. Coli. Suponga que cuando se vende un pollo en la carnicería, éste se selecciona al azar de un contenedor donde pueden encontrarse pollos adquiridos en cualquiera de los proveedores, y que la venta de un pollo es independiente de las demás. Calcule:

1. P("Un pollo esté contaminado con E. Coli")
2. P("De los próximos 10 pollos vendidos, menos de 3 pollos estén contaminados con E. Coli")
3. P("El 8º pollo vendido en un día sea el primero que se encuentra contaminado")
4. Si la carnicería compra un lote de 950 pollos por día, ¿Cuántos pollos se espera que estén contaminados?

Ejercicio 17

Se presume que en cierta zona geográfica hay yacimientos petroleros. Para realizar la exploración, la zona geográfica se divide en 10 campos. En cada campo hay una certeza del 5% de que exista un yacimiento. Se realiza una prospección en cada campo con un mismo equipo. Se asume que la prospección siempre da resultados correctos. Se desea que determine:

1. La probabilidad de que tengan que realizarse 5 prospecciones antes de encontrar el primer yacimiento.
2. La probabilidad de que más de 7 campos tengan un yacimiento.
3. La probabilidad de que se hallan realizado al menos 3 prospecciones con resultado negativo antes de encontrar el segundo yacimiento.
4. Si cada prospección cuesta 500 millones de bolívares y cada yacimiento hallado supone una ganancia de 30000 millones. Calcule la ganancia esperada sobre la zona geográfica.

Ejercicio 18

En una línea de ensamblaje, algunos vehículos presentan fallas aleatorias de alineación debido a que un robot falla con una probabilidad de 0.01. Suponiendo que el ensamblaje de cada vehículo es independiente de los otros, calcule:

1. La probabilidad de que el octavo vehículo ensamblado sea el primero con fallas de alineación.
2. La probabilidad de que en una producción de 15 vehículos, al menos el 20% de los mismos presenten problemas de alineación.
3. La probabilidad de que tengan que ensamblarse más de 5 vehículos para encontrar el 2º con problemas de alineación.
4. ¿Cuántos vehículos espera que no tengan fallas de alineación en una producción de 40 vehículos?
5. La producción de un vehículo tiene un costo de X Bs. Por otro lado, cuando un vehículo presenta problemas de alineación, debe someterse a un proceso de rectificación que tiene un costo adicional de Y Bs. Si se producen al día una cantidad de 50 vehículos ¿Cuál debe ser el precio de venta de los vehículos, para garantizar una ganancia promedio del 25% sobre el costo de los mismos?

Ejercicio 19

Se reparten 7 cartas de un mazo de póker que no tiene comodines. Calcule:

1. La probabilidad de que exactamente dos de las cartas sean rojas (corazones o diamantes).
2. La probabilidad de que al menos una de las cartas sea reina (Q).
3. La probabilidad de que más de cuatro de las cartas seleccionadas tenga un valor mayor a 6

Ejercicio 20

Un científico inocula varios ratones, uno a la vez, con el germen de una enfermedad hasta que encuentra dos que contraen la enfermedad. Si de cada seis ratones uno contrae dicha enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que se requieran ocho ratones?

Ejercicio 21

Cierta área del este de Estados Unidos, resulta afectada, en promedio, por 6 huracanes al año. Se supone que la aparición de huracanes, sigue una distribución de Poisson. Calcule:

1. La probabilidad de que la región se encuentre afectada por menos de 4 huracanes en un año.
2. La probabilidad de que la región se encuentre afectada por entre 6 y 8 huracanes en un año.

Solución:

X="cantidad de huracanes en un año".

$X \sim Poisson(\gamma . t)$ *donde* $\gamma = ocurrencias\ por\ unidad\ de\ tiempo = 6\ \left(6\,\frac{huracanes}{año}\right)$

$y\ t = unidad\ de\ tiempo = 1\ (1\ año)$

a) $P\ (X < 4) = \sum_{i=0}^{3} \frac{e^{-6}6^{i}}{i!}$

b) $P\ (6 \leq X \leq 8) = \sum_{i=6}^{8} \frac{e^{-6}6^{i}}{i!}$

Ejercicio 22

Se sabe que la probabilidad de que un niño en edad escolar presente escoliosis (una forma de desviación de la columna vertebral) es 0.004. De una muestra de 5000 niños pertenecientes a la zona educativa del estado Aragua, calcule:

1. La probabilidad de que menos de 5 niños presenten escoliosis.
2. La probabilidad de que 8, 9, o 10 niños presenten escoliosis.

Ejercicio 23

Los cambios en los procedimientos de los aeropuertos requieren de estudios minuciosos. Los índices de llegadas de los aviones son un factor importante que se debe tomar en cuenta. Suponga que los aviones pequeños llegan a cierto aeropuerto siguiendo una distribución Poisson, con una tasa promedio de seis aviones por hora. Determine:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 aeronaves pequeñas lleguen durante un período de 1 hora?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 lleguen durante un período de 1 hora.

Ejercicio 24

Una encuesta realizada en Caracas a 17000 estudiantes universitarios, revela que el 70% desaprueba el consumo de cigarrillos. Si se selecciona al azar un grupo de 18 estudiantes ¿Cuál es la probabilidad de que más de 9, pero menos de 14 estudiantes desaprueben el consumo de cigarrillos?

Solución: $\sum_{i=10}^{13}\binom{18}{i}(0.7)^i(0.3)^{18-i}$

Ejercicio 25

Un fabricante de automóviles está preocupado por una falla en el sistema de frenos de cierto modelo de vehículo. Esta falla puede ser causa de accidentes automovilísticos. Suponga que la distribución de probabilidades del número de accidentes del modelo del vehículo en cuestión debido a la falla indicada anteriormente, sigue una distribución de Poisson con un promedio de 5 vehículos/año. Calcule:

1. La probabilidad de que a lo sumo 3 vehículos por año puedan sufrir accidentes debido a una falla en su sistema de frenos.
2. La probabilidad de que en un año no se reporten accidentes debido a la falla en el sistema de frenos.
3. La probabilidad de que en un año ocurran al menos 6 accidentes por fallas en el sistema de frenos.

Ejercicio 26

Una empresa manufacturera produce circuitos integrados, de los cuales el 1% son defectuosos. Encuentre la probabilidad de que una caja que contiene 100 circuitos no presente circuitos defectuosos. Contraste este resultado usando la distribución Poisson. ¿Cuáles son sus conclusiones?

Ejercicio 27

En el SENIAT se ha determinado que en promedio, una persona de 100 comete algún error al llenar la planilla de Declaración de Impuesto Sobre la Renta (D.I.S.L.R). Si se seleccionan 10000 planillas al azar, encuentre la probabilidad de que entre 80 y 100 planillas de D.I.S.L.R inclusive, tengan algún error.

Ejercicio 28

Un sitio Web es operado por cuatro servidores idénticos. Sólo una se utiliza para operar el sitio, los otros son piezas de repuesto que puede ser activado en caso de que el servidor activo falla. La probabilidad de que una petición en el sitio Web genera un fallo en el servidor activo es 0,0001. Supongamos que cada petición es independiente. ¿Cuál es el nro promedio de peticiones hasta el fallo de los cuatro ordenadores?

Ejercicio 29

Tres máquinas A, B y C producen respectivamente 60%, 30% y 10% del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de desperfectos de producción de estas máquinas son respectivamente 2%, 3% y 4%. Si la fábrica produce 1000 artículos diarios ¿cuál es la probabilidad de que 30 artículos estén dañados?

Ejercicio 30

Una empresa realiza una inspección en los envíos de los proveedores con el fin de separar aquellos productos que no pasan el test. Supongamos que un lote contiene 1000 unidades y el 1% son defectuosos. ¿Qué tamaño de la muestra se necesita para que la probabilidad de elegir al menos un elemento no conforme en la muestra es de al menos 0,90? Suponga que la aproximación binomial a la distribución hipergeométrica es adecuada.

Ejercicio 31

Tres personas lanzan una moneda y el disparejo paga los cafés. Si todas las monedas tienen el mismo resultado, se lanzan de nuevo. Encuentre la probabilidad de que se necesiten menos de 4 lanzamientos.

GDPyE Marzo 2011