Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Escuela de Computación
Probabilidad y Estadística
Práctica Nº 4

Distribuciones de Variables Aleatorias Distribuidas en forma Conjunta

Objetivos de la práctica:

Objetivo general:

Al finalizar la práctica, el estudiante deberá conocer los conceptos fundamentales de las variables aleatorias distribuidas en forma conjunta. También el estudiante deberá comprender los conceptos de covarianza y correlación de variables aleatorias conjuntas, y la relación entre la independencia estadística y la covarianza. El estudiante debe comprender el concepto de eventos equivalentes y transformación de variables aleatorias en una dimensión.

Objetivos específicos:

- Establecer eventos sobre un recorrido bidimensional, así como determinar el valor de probabilidad asociado a dichos eventos.
- Manejar los conceptos de probabilidad condicional y distribución marginal de probabilidad, en el contexto de las variables aleatorias distribuidas en forma conjunta.
- Determinar las características básicas de una variable aleatoria bidimensional (Esperanza y Varianza).
- Conocer la definición de covarianza.
- Conocer las propiedades de la covarianza.
- Conocer la definición y significado del coeficiente de correlación estándar.
- Calcular la función de densidad de probabilidad para transformaciones de variables aleatorias discretas.
- Calcular la distribución de probabilidad para transformaciones de variables aleatorias continuas unidimensionales.

Práctica Nº 4

Desarrollo de la práctica:

Ejercicio 1

Supóngase que las v.a. X e Y tienen la siguiente fdp conjunta:

X/Y	0	1	2
0	0	0	0.49
1	0	0.42	0
2	0.09	0	0

1. Halle las fdps marginales de X e Y
2. Halle las respectivas Esperanzas y Varianzas.
3. Verifique si las variables X e Y son independientes.
4. Calcule P(X = 1 | Y = 2)
5. Calcule E[X(2-Y)]

Ejercicio 2

Se seleccionan dos cartas (extracción con reposición) al azar de una caja que contiene cinco cartas numeradas de la siguiente forma: 1, 1, 2, 2 y 3. Sea X la v.a. que denota la suma de los dos números obtenidos e Y la v.a. del mayor de los dos números. Determine la distribución de probabilidad conjunta de X e Y.

1. La fdp conjunta de X y Y.
2. La fdp marginal de X.
3. La fdp marginal de Y.
4. X y Y son independientes?. Justifique.

Ejercicio 3

Se lanza dos veces una moneda. Se definen dos v.a. W,H: W es el número de caras en el primer lanzamiento, H es el número total de caras en ambos lanzamientos. Si la moneda no está balanceada y el sello tiene una probabilidad de ocurrencia de 2/3. Hallar:

1. La fdp conjunta de H y W.
2. La fdp marginal de H.
3. La fdp marginal de W.
4. W y H son independientes?. Justifique.
5. Probabilidad de que ocurra al menos una cara en el experimento.
6. Esperanza de H dado que resultó cara en el primer lanzamiento.
7. Esperanza de W dado que resultó sello en el segundo lanzamiento.
8. Esperanza de W.
9. Covarianza de H y W.

Ejercicio 4

Sean X e Y dos variables aleatorias discretas, tales que el rango de X e Y es el conjunto $\{-1, 0, 1\}$. La función de probabilidad conjunta de X e Y es la siguiente:

X/Y	-1	0	1
-1	1/16	3/16	1/16
0	3/16	0	3/16
1	1/16	3/16	1/16

1. ¿Son X e Y independientes?
2. Calcule $E(Y \mid X = 1)$

Ejercicio 5

Sea X el número de veces que falla cierta máquina (1, 2 ó 3 veces) en un día dado. Sea Y el número de veces que se llama a un técnico por una emergencia. Su distribución de probabilidad conjunta viene dada:

X/Y	1	2	3
1	0.05	0.05	0
2	0.05	0.1	0.2
3	0.1	0.35	0.1

Encuentre:

1. Las fdps marginales de X e Y
2. P($X \leq 2$, $Y \leq 1$)
3. P($Y \leq 2$)
4. Determine si las variables son independientes
5. P($Y > 1 \mid X = 2$)
6. P($X \leq 2 \mid Y = 3$)
7. E(Y)

Ejercicio 6

Para cada una de las siguientes funciones, determine el valor de la constante c, tal que las mismas representen fdps conjuntas de las variables aleatorias X e Y:

1. $$f(x,y) = \begin{cases} cxy & si\ x = 1,2,3; y = 1,2,3 \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$
2. $$f(x,y) = \begin{cases} c|x-y| & si\ x = -2,0,2; y = -2,3. \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$
3. $$f(x,y) = \begin{cases} c|x-y| & si\ 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Ejercicio 7

Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x(2x+y)}{7} & si\ 0 < x < 1, 0 < y < 2 \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

1. Verifique que la función anterior es efectivamente una distribución conjunta.

2. Encuentre la función de densidad marginal para X.
3. Encuentre la función de densidad marginal para Y.
4. Halle P (X < 1/2, Y < 1/2)
5. Calcule P (X > Y).
6. ¿Cuál es el valor de P (X = Y)?
7. Calcule P(Y > 1/2 | X = 1/2)

Ejercicio 8

Sean X e Y los niveles de concentración de dos contaminantes en una determinada porción de un tanque de agua. Si la fdp conjunta está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{8000} & si\ 0 < x < 20, 0 < y < 20 \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Si el nivel de concentración observado de Y es igual a 10, obtenga la probabilidad de que el nivel de concentración de X sea a lo sumo 14. b) Obtenga la esperanza condicional de X para Y=10.

Ejercicio 9

Sean las variables aleatorias X~UNIFORME(a,b) e Y~UNIFORME(a,b) para cualesquiera valores reales a < b e independientes.

1. Escriba una expresión para la función de densidad conjunta de X e Y.
2. Calcule P(X > Y)

Ejercicio 10

Un hombre y una mujer fijan una cita en un lugar determinado. Si la hora de llegada al lugar de la cita para el hombre es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre las 12:30 pm. y la 1:00 pm y la hora de llegada al lugar de la cita para la mujer es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre las 12:30 pm. y la 1:10 pm. Las horas de llegada son independientes entre sí. Calcule:

1. La probabilidad de que la mujer llegue primero al lugar de encuentro.

2. La probabilidad de que la primera persona en llegar tenga que esperar más de 10 minutos por la otra.

Ejercicio 11

Se define una función de densidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y, dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{\frac{-x^2}{2}-y} & si\ 0 \leq x; 0 \leq y \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

1. Calcule las funciones de densidad marginales de f.
2. Verifique si X e Y son independientes.
3. Calcule P(X < 5 | Y = 3)

$$Sol: 1) f_y(y) = e^{-y} \quad f_x(x) = x \times e^{\frac{-x^2}{2}} \qquad 2) si \qquad 3) 0.12$$.

Ejercicio 12

Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con una función de densidad conjunta de probabilidad dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x-y}{5} & si\ 0 < x < 2, 1 < y < 3 \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Calcule la esperanza y la varianza de Z=XY .

Ejercicio 13

Dada la función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6-x-y}{8} & si\ 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

1. Obtenga la función de densidad marginal de Y.
2. Halle E(Y).
3. Determine $P(Y > 1)$.
4. Calcule $P(1 < Y < 3\,, X < 1)$.

Ejercicio 14

Encuentre la función de probabilidad conjunta de la v.a. (X,Y) para los siguientes casos:

1. Se lanzan dos dados, si X es el máximo valor obtenido e Y es la suma de los dados.
2. Se lanzan dos dados, si X es el valor del primer dado e Y es el máximo de los dos.
3. Se lanzan dos dados, si X es el mínimo e Y es el máximo de los dados.

Ejercicio 15

15. Sean X, Y v.a. con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

X/Y	1	3	5
1	0.10	0.20	0.10
2	0.15	0.30	0.15

Calcule:

a) $E(2X + 3Y)$

b) $E(XY)$

c) Calcule las funciones de densidad marginales de X y Y.

d) Determine si X e Y son independientes.

Ejercicio 16

Sean X, Y v.a. con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2(x+2y)}{7} & si\ 0 < x < 1; 1 < y < 2 \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Calcule:

a) E(g(X,Y)), con g(X,Y) = X $(\frac{1}{Y^3} + \frac{X}{Y})$

b) E(2XY)

Ejercicio 17

Sean X, Y v.a. con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & si\ 0 < x < y < 1 \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Calcule:

1. Verifique que es una fdp conjunta válida.
2. Encuentre las fdps marginales de X y Y
3. Determine si son independientes.
4. P(X+Y>1)
5. P(X<1/2)

Ejercicio 18

Sean X, Y v.a. con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y-2xy) & si\ 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ \\ 0 & caso\ contrario \end{cases}$$

Calcule:

1. Verifique que es una fdp conjunta válida.
2. Encuentre las fdps marginales de X y Y
3. Determine si son independientes.

Ejercicio 19

Se seleccionan al azar dos repuestos para un bolígrafo de una caja que contiene tres repuestos azules, dos rojos y tres verdes. Si X es el número de repuestos azules y Y el número de repuestos rojos que se seleccionan. Encuentre:

a) La función de probabilidad conjunta f(x,y).
b) $P(x+y \leq 1)$.

GDPyE Mayo 2011